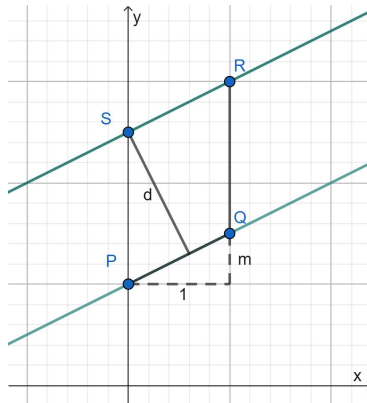


Abstand paralleler Geraden

Wir betrachten zwei Geraden mit den Gleichungen $y = mx + t_1$, $y = mx + t_2$. Die Schnittpunkte der Geraden mit der y-Achse nennen wir P und S. Die Länge der Strecke [PS] ist dann gleich $|t_1 - t_2|$.

Beweis 1: Mit der Strecke [PS] als Grundseite zeichnen wir ein Parallelogramm PQRS der Höhe 1:



also ist der Flächeninhalt dieses Parallelogramms gleich

$$A = |t_1 - t_2| \cdot 1$$

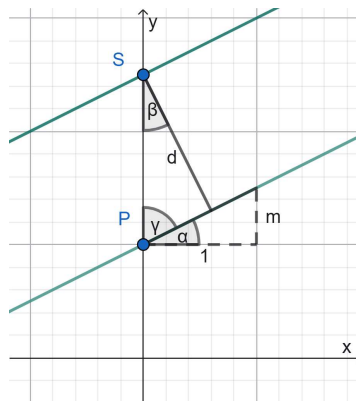
Andererseits kann man den Flächeninhalt des Parallelogramms auch ausrechnen, indem man [PQ] als Grundseite nimmt. Die Höhe ist dann gleich dem Abstand d der beiden Geraden, und für die Länge der Grundseite folgt mit dem Satz von Pythagoras der Wert $\sqrt{1 + m^2}$. Also folgt für den Flächeninhalt auch

$$A = \sqrt{1 + m^2} \cdot d$$

Setzt man beide Ausdrücke für den Flächeninhalt gleich und stellt nach d um, so folgt

$$d = \frac{|t_1 - t_2|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Beweis 2: Wir zeichnen ab dem Punkt P ein Steigungsdreieck mit $\Delta x = 1$ ein:



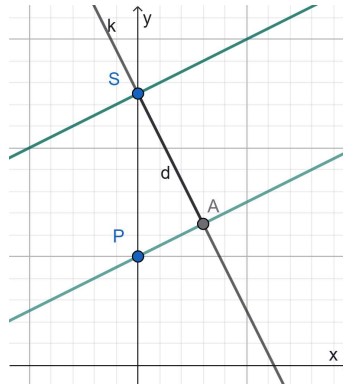
Mit dem Satz von Pythagoras folgt wieder, dass die Hypotenuse in diesem Dreieck die Länge $\sqrt{1 + m^2}$ hat. Außerdem gilt offensichtlich für die Winkel: $\alpha + \gamma = 90^\circ$ und $\beta + \gamma = 90^\circ$, woraus sofort $\alpha = \beta$ folgt. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke sind also ähnlich zueinander, das heißt sie haben dieselben Seitenverhältnisse:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{d}{|t_1 - t_2|}$$

(und dies ist natürlich auch gleich $\cos \alpha = \cos \beta$). Daraus folgt wieder sofort

$$d = \frac{|t_1 - t_2|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Beweis 3: Wir zeichnen die Gerade k, die senkrecht zu beiden Geraden steht und durch S verläuft:



Diese Gerade hat die Gleichung $y = -\frac{1}{m}x + t_1$ (oder $+t_2$, je nachdem, welche der beiden Geraden die y-Achse in S schneidet – ndert letztlich nichts an der Rechnung). Wir berechnen nun den Schnittpunkt A dieser Geraden mit derjenigen der beiden parallelen Geraden, die durch P verläuft:

$$-\frac{1}{m}x + t_1 = mx + t_2$$

(oder rechts nun eben $+t_1$, siehe oben). Bringen wir alle Summanden mit x nach rechts und alle ohne x nach links und klammern rechts das x aus,

$$t_1 - t_2 = mx + \frac{1}{m}x = \left(m + \frac{1}{m}\right)x$$

Nun musste man durch den Faktor vor x teilen. Die Rechnung wird aber übersichtlicher, wenn man zunächst noch die Gleichung mit m multipliziert,

$$m(t_1 - t_2) = (m^2 + 1)x$$

Damit folgt

$$x_A = m \frac{t_1 - t_2}{m^2 + 1}$$

Eingesetzt in die Gleichung der Geraden k folgt dann

$$y_A = -\frac{1}{m} \cdot m \frac{t_1 - t_2}{m^2 + 1} + t_1 = -\frac{t_1 - t_2}{m^2 + 1} + t_1$$

Der Abstand der beiden parallelen Geraden ist nun gleich dem Abstand der Punkte S und A. Mit dem Satz von Pythagoras folgt:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(m \frac{t_1 - t_2}{m^2 + 1} - 0\right)^2 + \left(-\frac{t_1 - t_2}{m^2 + 1} + t_1 - t_1\right)^2} \\ &= \sqrt{m^2 \frac{(t_1 - t_2)^2}{(m^2 + 1)^2} + \frac{(t_1 - t_2)^2}{(m^2 + 1)^2}} = \sqrt{(m^2 + 1) \frac{(t_1 - t_2)^2}{(m^2 + 1)^2}} = \sqrt{\frac{(t_1 - t_2)^2}{m^2 + 1}} \end{aligned}$$

Damit folgt schließlich wieder

$$d = \frac{|t_1 - t_2|}{\sqrt{1 + m^2}}$$