Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Nach allgemeiner Definition der Ableitungsfunktion gilt zunächst:

$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h} = e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \exp(x)\cdot k$$

mit einer konstanten Zahl k; diese Gleichung gilt für alle x, insbesondere für x = 0, also folgt:

$$\exp'(0) = \exp(0)\cdot k = k,$$

die Konstante $k = \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ ist also genau die Ableitung von exp bei x = 0. Dieser Grenzwert ist nicht so einfach direkt berechenbar; im Folgenden wird deshalb ein „kleiner“ Umweg benutzt.

a) Steigung der Graphen von Funktion und Umkehrfunktion

Der Graph der Umkehrfunktion entsteht bekanntlich durch Spiegelung des Graphen der ursprünglichen Funktion an der ersten Winkelhalbierenden. Dabei werden auch Tangenten an den Graphen gespiegelt; es folgt, dass Tangenten an den Graphen der Umkehrfunktion ihrerseits Umkehrfunktionen zu Tangenten an den Graphen der ursprünglichen Funktion im entsprechenden Punkt sein müssen.

Eine Tangente habe die Gleichung

$$y = mx + b;$$

um die Gleichung der Umkehrfunktion zu ermitteln, wird dies nach x aufgelöst:

$$x = \frac{1}{m}y - \frac{1}{m}b,$$

dann benennt man x und y um:

$$y = \frac{1}{m}x - \frac{1}{m}b.$$

Es folgt also:

Die Steigung des Graphen der Umkehrfunktion ist gleich dem Kehrwert der Steigung des Graphen der Funktion im entsprechenden Punkt.

Dies kann man auch rechnerisch zeigen: in der Gleichung

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

leitet man links mit Hilfe der Kettenregel ab, rechts direkt; dies ergibt:

$$f'(f^{-1}(x))\cdot f^{-1}{}'(x) = 1.$$

Also:

$$f^{-1}{}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$ (*braucht man in der 13. Klasse!*)

Einfacher kann man sich das übrigens in der Leibniz’schen Schreibweise merken: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Das können wir jetzt benutzen, um den obigen Grenzwert zu berechnen – mit noch einem kleinen Umweg...

b) Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion bei x = 0

Die Ableitung von exp bei x = 0 kann man immer noch nicht direkt berechnen – aber man kann die Ableitung von ln bei x = 1 berechnen. Nach Definition der Ableitungsfunktion gilt zunächst:

$$\ln'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}$$

Vorausgesetzt, dieser Grenzwert existiert (was eigentlich erst bewiesen werden müsste...), kann man h durch 1/n ersetzen (mit einer natürlichen Zahl n) und statt $h\to 0$ dann $n\to\infty$ streben lassen, also

$$\ln'(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Da die ln-Funktion stetig ist, folgt:

$$\ln'(1) = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1,$$

das heißt also: die Steigung des Graphen der ln-Funktion im Punkt (1|0) ist gleich 1. Mit dem in (a) gesagten folgt dann, dass die Steigung des Graphen der exp-Funktion im Punkt (0|1) gleich dem Kehrwert von 1, also ebenfalls gleich 1 ist. Es ergibt sich also:

$$k = \exp'(0) = 1$$

c) Ableitungsfunktionen

Nach den obigen Vorarbeiten folgt nun sofort:

$$\boxed{(e^x)' = e^x},$$

die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion ist also die Funktion selbst! (daher stammt der Name „natürliche“ Exponentialfunktion)

Da man eine allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ immer schreiben kann als $f(x) = e^{x\cdot\ln a}$, folgt mit der Kettenregel $f'(x) = e^{x\cdot\ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x\cdot\ln a} \cdot \ln a$, also

$$\boxed{(a^x)' = \ln a \cdot a^x}$$

Noch allgemeiner folgt (wieder mit der Kettenregel):

$$(a^{bx+c})' = b\cdot\ln a\cdot a^{bx+c}$$

Für die Ableitung der ln-Funktion kann man die Formel aus (a) verwenden:

$$f(x) = e^x,\quad f'(x) = e^x,\quad f^{-1}(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad \ln'(x) = f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\ln(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

oder, mit der Leibniz'schen Schreibweise:

$$y = e^x \Rightarrow x = \ln y \text{ und } \frac{dy}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}, \qquad \text{d. h. } \ln'(y) = \frac{1}{y}, \text{ d. h. } \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Auf beide Arten ergibt sich also:

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Da man eine allgemeine Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a x$ immer schreiben kann als $f(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, folgt sofort: $f'(x) = \frac{\ln'(x)}{\ln a} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln a}$, also $\boxed{\log'_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}}$

bzw. noch allgemeiner (mit der Kettenregel):

$$\log_a(bx + c) = \frac{b}{\ln a}\cdot\frac{1}{bx+c}$$

Insbesondere ergibt sich auch:

$$\ln'(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x};$$

zusammengefasst also:

$$\boxed{\ln'|x| = \frac{1}{x}}.$$