Ableitungen der Sinus- und der Kosinusfunktion

Für die Ableitungsfunktionen von sin und cos schreiben wir im Folgenden sin' und cos'. Nach Definition der Ableitung gilt dann zunächst:

$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \qquad \text{und} \qquad \cos'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

Nun kann man zunächst die Additionstheoreme benutzen, um dies folgendermaßen zu schreiben:

$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \text{ und } \cos'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}$$

Die Brüche kann man dann folgendermaßen als Summen von jeweils zwei Brüchen schreiben:

$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\right)$$

Durch Anwendung der Grenzwert-Rechenregeln kann man dies dann umformen zu:

$$\sin'(x) = \sin(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$$

$$\cos'(x) = \cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$$

In beiden Termen stehen nun jeweils dieselben zwei Grenzwerte; da sie nicht von x abhängen, sind dies konstante Zahlen:

$$k_1 = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}; \qquad k_2 = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$$

Es ergeben sich also die beiden Gleichungen

$$\sin'(x) = k_1\cdot\sin(x) + k_2\cdot\cos(x) \qquad \text{und} \qquad \cos'(x) = k_1\cdot\cos(x) - k_2\cdot\sin(x)$$

das heißt, die Ableitungsfunktionen von sin und cos sind jeweils Linearkombinationen von sin und cos mit noch unbekannten Konstanten k_1 und k_2. Schafft man es, diese beiden Konstanten zu berechnen, so kennt man die Ableitungsfunktionen von sin und cos.

Dafür beachtet man zunächst, dass diese beiden Gleichungen für *jeden* x-Wert gelten – also speziell auch für x = 0. Setzt man x = 0 in beide Gleichungen ein, so ergibt sich:

$$\sin'(0) = k_1\cdot\sin(0) + k_2\cdot\cos(0) = k_1\cdot 0 + k_2\cdot 1 = k_2$$

$$\cos'(0) = k_1\cdot\cos(0) + k_2\cdot\sin(0) = k_1\cdot 1 + k_2\cdot 0 = k_1$$

Die Konstanten k_1 und k_2 geben also genau die Ableitung (also die Steigung) von cos bzw. sin an der Stelle 0 an. Betrachtet man die Graphen von sin und cos, so ist zu vermuten, dass $k_1 = 0$ und $k_2 = 1$ gilt; dies wird im Folgenden gezeigt.

$k_1 = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}$ kann man direkt berechnen: man erweitert zunächst den Bruch mit cos(h) + 1 und benutzt dann die dritte binomische Formel; dies ergibt:

$$k_1 = \lim_{h\to 0}\frac{(\cos(h)-1)(\cos(h)+1)}{h(\cos(h)+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2(h)-1}{h(\cos(h)+1)}$$

Den Zähler schreibt man mit dem „trigonometrischen Pythagoras" $\sin^2(h) + \cos^2(h) = 1$ um:

$$k_1 = \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)} = -\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\cdot\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}\right) = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1};$$

im letzten Schritt wurde der Grenzwertsatz für ein Produkt benutzt.
Es ergibt sich also:

$$k_1 = -k_2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}$$

Wegen der Stetigkeit von sin und cos kann man dies nun einfach durch Einsetzen berechnen:

$$k_1 = -k_2\cdot\frac{\sin(0)}{\cos(0)+1} = -k_2\cdot\frac{0}{1+1} = 0$$

Wie bereits oben vermutet ergibt sich also $k_1 = 0$.

Es bleibt die Ermittlung von $k_2 = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$. Wir wissen schon, dass gilt: sin(h) < h und tan(h) > h.
Daraus folgt, indem man durch h > 0 teilt:

$$\frac{\sin(h)}{h} < 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\sin(h)}{h} > \cos(h)$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \leq 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \geq \lim_{h \to 0} \cos(h) = 1$$

Die Konstante $k_2 = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$ muss also gleichzeitig kleiner oder gleich *und* größer oder gleich 1 sein – also folgt $k_2 = 1$, wie oben bereits vermutet. Damit ergibt sich also endlich für die Ableitungsfunktionen:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin'(x) = \cos(x) \\ \cos'(x) = -\sin(x) \end{array}}$$

Folgerungen und Anmerkung:
1) Mit der Kettenregel folgt:

$$\boxed{\sin'(ax + b) = a \cdot \cos(ax + b)} \quad \text{und} \quad \boxed{\cos'(ax + b) = -a \cdot \sin(ax + b)}$$

2) Für die zweite Ableitung folgt: $\sin''(x) = -\sin(x)$ und $\cos''(x) = -\cos(x)$ beziehungsweise allgemein

$$\sin''(ax + b) = -a^2 \cdot \sin(ax + b) \quad \text{bzw.} \quad \cos''(ax + b) = -a^2 \cdot \cos(ax + b)$$

Die zweite Ableitung ist also jeweils gleich einer negativen Konstante mal die ursprünglichen Funktion!
Man sagt, sin und cos erfüllen die Differenzialgleichung

$$f''(x) = -a^2 \cdot f(x)$$

Anwendungen in der Physik:

a) harmonische Schwingung
b) gleichförmige Kreisbewegung (Radius r): Für einen Punkt auf dem Kreis, dessen Ortsvektor den Winkel φ mit der x-Achse einschließt gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Bewegt sich dieser Punkt mit der Winkelgeschwindigkeit ω und ist zum Zeitpunkt t = 0 auf der x-Achse, so ist φ = ωt, also $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$. Die Momentangeschwindigkeit ist die erste Ableitung: $\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\varphi) \\ r\,\omega\cos(\varphi) \end{pmatrix}$. Wie man leicht nachrechnet, ist $\vec{x} \circ \vec{v} = 0$, die Geschwindigkeit steht also senkrecht auf dem Ortsvektor und ist damit tangential zum Kreis. Die Momentanbeschleunigung ist die zweite Ableitung der Position, also: $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\varphi) \\ -r\,\omega^2 \sin(\varphi) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{x}$. Die Beschleunigung zeigt also immer zum Kreismittelpunkt und hat den Betrag $a = \omega^2 r$.