

Ableitungen der Sinus- und der Kosinusfunktion

Für die Ableitungsfunktionen von sin und cos schreiben wir im Folgenden \sin' und \cos' . Nach Definition der Ableitung gilt dann zunächst:

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \quad \text{und} \quad \cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Nun kann man zunächst die Additionstheoreme benutzen, um dies folgendermaßen zu schreiben:

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \quad \text{und} \quad \cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}$$

Die Brüche kann man dann folgendermaßen als Summen von jeweils zwei Brüchen schreiben:

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \right)$$

Durch Anwendung der Grenzwert-Rechenregeln kann man dies dann umformen zu:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \sin(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ \cos'(x) &= \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

In beiden Termen stehen nun jeweils dieselben zwei Grenzwerte; da sie nicht von x abhängen, sind dies konstante Zahlen:

$$k_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}; \quad k_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

Es ergeben sich also die beiden Gleichungen

$$\sin'(x) = k_1 \cdot \sin(x) + k_2 \cdot \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = k_1 \cdot \cos(x) - k_2 \cdot \sin(x)$$

das heißt, die Ableitungsfunktionen von sin und cos sind jeweils Linearkombinationen von sin und cos mit noch unbekanntenen Konstanten k_1 und k_2 . Schafft man es, diese beiden Konstanten zu berechnen, so kennt man die Ableitungsfunktionen von sin und cos.

Dafür beachtet man zunächst, dass diese beiden Gleichungen für *jeden* x-Wert gelten – also speziell auch für $x = 0$. Setzt man $x = 0$ in beide Gleichungen ein, so ergibt sich:

$$\sin'(0) = k_1 \cdot \sin(0) + k_2 \cdot \cos(0) = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 1 = k_2$$

$$\cos'(0) = k_1 \cdot \cos(0) - k_2 \cdot \sin(0) = k_1 \cdot 1 - k_2 \cdot 0 = k_1$$

Die Konstanten k_1 und k_2 geben also genau die Ableitung (also die Steigung) von cos bzw. sin an der Stelle 0 an. Betrachtet man die Graphen von sin und cos, so ist zu vermuten, dass $k_1 = 0$ und $k_2 = 1$ gilt; dies wird im Folgenden gezeigt.

$k_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$ kann man direkt berechnen: man erweitert zunächst den Bruch mit $\cos(h) + 1$ und

benutzt dann die dritte binomische Formel; dies ergibt:

$$k_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1)}{h(\cos(h) + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)}$$

Den Zähler schreibt man mit dem „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2(h) + \cos^2(h) = 1$ um:

$$k_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1} \right) = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1};$$

im letzten Schritt wurde der Grenzwertsatz für ein Produkt benutzt.

Es ergibt sich also:

$$k_1 = -k_2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1}$$

Wegen der Stetigkeit von sin und cos kann man dies nun einfach durch Einsetzen berechnen:

$$k_1 = -k_2 \cdot \frac{\sin(0)}{\cos(0) + 1} = -k_2 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0$$

Wie bereits oben vermutet ergibt sich also $k_1 = 0$.

Es bleibt die Ermittlung von $k_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$. Wir wissen schon, dass gilt: $\sin(h) < h$ und $\tan(h) > h$.

Daraus folgt, indem man beide Ungleichungen durch $h > 0$ teilt und die zweite mit $\cos(h)$ multipliziert:

$$\frac{\sin(h)}{h} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{\sin(h)}{h} > \cos(h)$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \leq 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1$$

Die Konstante $k_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$ muss also gleichzeitig kleiner oder gleich *und* größer oder gleich 1 sein – also folgt $k_2 = 1$, wie oben bereits vermutet. Damit ergibt sich also endlich für die Ableitungsfunktionen:

$$\begin{array}{l} \sin'(x) = \cos(x) \\ \cos'(x) = -\sin(x) \end{array}$$

Folgerungen und Anmerkung:

1) Mit der Kettenregel folgt:

$$\boxed{\sin'(ax + b) = a \cdot \cos(ax + b)} \quad \text{und} \quad \boxed{\cos'(ax + b) = -a \cdot \sin(ax + b)}$$

2) Für die zweite Ableitung folgt: $\sin''(x) = -\sin(x)$ und $\cos''(x) = -\cos(x)$ beziehungsweise allgemein $\sin''(ax + b) = -a^2 \cdot \sin(ax + b)$ bzw. $\cos''(ax + b) = -a^2 \cdot \cos(ax + b)$

Die zweite Ableitung ist also jeweils gleich einer negativen Konstante mal die ursprüngliche Funktion!

Man sagt, sin und cos erfüllen die Differenzialgleichung

$$f''(x) = -a^2 \cdot f(x)$$

Anwendungen in der Physik:

a) harmonische Schwingung

b) gleichförmige Kreisbewegung (Radius r): Für einen Punkt auf dem Kreis, dessen Ortsvektor den

Winkel φ mit der x-Achse einschließt gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Bewegt sich dieser Punkt mit der

Winkelgeschwindigkeit ω und ist zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der x-Achse, so ist $\varphi = \omega t$, also

$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$. Die Momentangeschwindigkeit ist die erste Ableitung: $\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\varphi) \\ r\omega \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

Wie man leicht nachrechnet, ist $\vec{x} \circ \vec{v} = 0$, die Geschwindigkeit steht also senkrecht auf dem Ortsvektor und ist damit tangential zum Kreis. Die Momentanbeschleunigung ist die zweite

Ableitung der Position, also: $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\varphi) \\ -r\omega^2 \sin(\varphi) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{x}$. Die Beschleunigung zeigt also

immer zum Kreismittelpunkt und hat den Betrag $a = \omega^2 r$.