gesucht: Ableitungsfunktion von $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$),

$$\text{also } f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

erst mal nur $(x + h)^n$ anschauen... mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$(x + h)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n$$

$$= x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n$$

also:

$$(x + h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n$$

also:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}$$

also:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1}$$