gesucht: Ableitungsfunktion von $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$),

$$\text{also } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

erst mal nur $(x + h)^n$ anschauen:
$(x + h)^n = (x + h) \cdot (x + h) \cdot .... \cdot (x + h)$ *(n Faktoren)*

beim Ausmultiplizieren erhält man:

- wenn man aus jeder Klammer jeweils das x nimmt: x^n
- wenn man aus einer Klammer das h nimmt und aus den anderen n–1 Klammern jeweils das x: $x^{n-1}\,h$; dafür gibt es n Möglichkeiten
- Summanden mit höheren Potenzen von h; der Vorfaktor ist uns jeweils egal
- wenn man aus jeder Klammer jeweils das h nimmt: h^n

also: $(x + h)^n = x^n + n\,x^{n-1}\,h + \ldots h^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + h^n$

$$\text{also: } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + n\,x^{n-1}\,h + \ldots\, h^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n\,x^{n-1}\,h + \ldots\, h^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \left(n\,x^{n-1} + \ldots\, h + \ldots\ldots\ldots\ldots + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(n\,x^{n-1} + \ldots\, h + \ldots\ldots\ldots\ldots + h^{n-1}\right)$$

$$= n\,x^{n-1}$$