Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion

Vorarbeit:

Nach Definition gilt: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (mit natürlichen Zahlen n)

$$\Rightarrow\ e^x = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

Setze nun abkürzend $m \coloneqq nx \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{x}{m}$, und für x > 0 folgt aus $n \to \infty$ auch $m \to \infty$; also ist

$$e^x = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

Dieser Grenzwert existiert für alle Werte von x > 0, und deshalb ist es egal, wie genau das m gegen unendlich geht – man kann statt der Zahlen m = nx (die im Allgemeinen keinen natürlichen Zahlen sind) auch natürliche Zahlen n verwenden, also

$$\boxed{e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

Außerdem stimmt diese Darstellung auch für x = 0, wie man durch Einsetzen sofort sieht.

Ableitung:

Damit geht das Ableiten ziemlich einfach:

$$(e^x)' = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)' = \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)' \text{ (Kettenregel!)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^1} \text{ (Potenzgesetz!)}$$

Jetzt kann man Zähler und Nenner einzeln betrachten: Der Zähler geht wieder gegen e^x (siehe oben), der Nenner geht gegen 1. Also folgt:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Für x < 0 kann man ähnlich argumentieren (wer will, kann's ja mal ausprobieren…).

Wenn man die Kettenregel nicht kennt, aber gewillt ist, eine Verallgemeinerung der binomischen Formel für beliebige Exponenten einfach so zu akzeptieren (ohne Herleitung), dann geht es auch anders…

Exponentialreihe:

Die Verallgemeinerung der binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ lautet für beliebige natürliche Exponenten lautet:

$$(a+b)^n = a^n b^0 + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \cdots.$$

Damit folgt:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1^n \left(\frac{x}{n}\right)^0 + \frac{n}{1} 1^{n-1} \left(\frac{x}{n}\right)^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 1^{n-2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 1^{n-3} \left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots\right)$$

Im zweiten Bruch hat man in Zähler und Nenner jeweils gleich viele Faktoren, kann das also auch als ein Produkt von mehreren Brüchen schreiben:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \cdots\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots\right)$$

Für $n \to \infty$ gehen alle Faktoren in den Klammern jeweils gegen 1, also bleibt letztlich nur noch

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots}$$

Die natürliche Exponentialfunktion ist also in gewissem Sinne ein „Polynom vom Grad unendlich‘‘ (der mathematische Fachausdruck wäre hier „Potenzreihe‘‘). Daran sieht man nun auch sofort, dass die natürliche Exponentialfunktion schneller ansteigt als jede beliebige Potenz.

Außerdem sieht man daran auch wieder sehr schnell die Ableitung:

$$(e^x)' = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right)' = 0 + 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots = e^x$$

Wenn man Kenntnisse aus der Stochastik (Summensymbol Σ, die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ und Fakultät $k!$) mitbringt, kann man die Exponentialreihe auch strenger herleiten. Die Verallgemeinerung der binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ für beliebige natürliche Exponenten lautet damit:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} a^{n-k} b^k,$$

und es folgt:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \dots \cdot (n-(k-1))}{n^k}.$$

Im zweiten Bruch hat man in Zähler und Nenner jeweils k Faktoren, kann das also auch als ein Produkt von k Brüchen schreiben:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Für $n \to \infty$ gehen alle diese k Faktoren jeweils gegen 1, also bleibt letztlich nur noch $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$,

und dafür schreibt man dann kurz

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.}$$