

Ableitungen von Exponentialfunktionen

Nach allgemeiner Definition der Ableitungsfunktion gilt zunächst:

$$\exp'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \exp(x) \cdot k$$

mit einer konstanten Zahl k ; diese Gleichung gilt für alle x , insbesondere für $x = 0$, also folgt:

$$\exp'(0) = \exp(0) \cdot k = k,$$

die Konstante $k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ ist also genau die Ableitung von \exp bei $x = 0$. Dieser Grenzwert ist nicht so einfach direkt berechenbar; im Folgenden wird deshalb mathematisch etwas unsauber argumentiert.

Die Euler'sche Zahl ist bekanntlich definiert als $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Mit den Potenzgesetzen ist deshalb $e^h = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{h \cdot n}$.

Setzen wir nun $m = h \cdot n$, also $n = m/h$, so folgt $e^h = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{h}{m}\right)^m$ bzw., da für $n \rightarrow \infty$ sicher auch $m \rightarrow \infty$ gilt, $e^h = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{h}{m}\right)^m$.

Der binomische Lehrsatz (Verallgemeinerung der binomischen Formel) sagt nun aber, dass

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \dots$$

gilt, wobei ... für Summanden mit höheren Potenzen von b steht. Deshalb ist

$$\left(1 + \frac{h}{m}\right)^m = 1^m + m \cdot 1^{m-1} \cdot \frac{h}{m} + \dots = 1 + h + \dots,$$

wobei ... für Summanden mit höheren Potenzen von h steht (die auch von m abhängen!).

Also ist $e^h = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + h + \dots)$ und damit

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1+h+\dots)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h+\dots}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \dots).$$

Das ... steht nun für Summanden, die alle mindestens h^1 enthalten.

Nun vertauschen wir die Reihenfolge der beiden Grenzwerte:

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} (1 + \dots).$$

Alle weiteren Summanden enthalten mindestens h^1 , gehen also gegen 0. Damit ist

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{m \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

und damit wiederum folgt sofort

$$\boxed{(e^x)' = e^x},$$

die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion ist also die Funktion selbst! (daher stammt der Name „natürliche“ Exponentialfunktion)

Da man eine allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ immer schreiben kann als $f(x) = e^{x \cdot \ln a}$, folgt mit der Kettenregel $f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a$, also

$$\boxed{(a^x)' = \ln a \cdot a^x}$$

Noch allgemeiner folgt (wieder mit der Kettenregel):

$$(a^{bx+c})' = b \cdot \ln a \cdot a^{bx+c}$$