Abgeschlossenheit einer Zahlenmenge bezüglich einer Verknüpfung

Zahlen kann man auf verschiedene Weise miteinander „verknüpfen“, z. B. kann man sie addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Als Verallgemeinerung schreiben wir hier für eine solche Verknüpfung allgemein das Zeichen $\circ$. (Beispiel: $5 \circ 2$ kann für 5 + 2, 5 – 2, 5 · 2 oder 5 : 2 stehen.)

Eine Zahlenmenge heißt abgeschlossen bezüglich einer Verknüpfung, wenn für alle Zahlen x und y aus der Menge gilt, dass $x \circ y$ auch wieder eine Zahl aus der Menge ist.

Beispiele:

- Die natürlichen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung +, weil für alle natürlichen Zahlen x und y die Zahl x + y wieder eine natürliche Zahl ist. Außerdem sind die natürlichen Zahlen auch abgeschlossen bezüglich ·.
- Die natürlichen Zahlen sind dagegen nicht abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung –, weil es natürliche Zahlen x und y gibt, sodass x – y *keine* natürliche Zahl ist (Beispiel: 1 und 2 sind natürliche Zahlen, aber 1 – 2 = -1 ist keine natürliche Zahl). Sie sind auch nicht abgeschlossen bezüglich : (Beispiel: 1 : 2 = 0,5 ist keine natürliche Zahl).
- Die ganzen Zahlen dagegen sind abgeschlossen bezüglich +, – und ·. Sie sind aber nicht abgeschlossen bezüglich :, da z. B. 1 : 2 = 0,5 keine ganze Zahl ist.
- Die rationalen Zahlen (ohne Null!) sind dagegen abgeschlossen bezüglich aller vier Grundverknüpfungen +, –, · und :.

Um die Grundrechenarten mit allen Zahlen ausführen zu können, musste man also den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen schrittweise *erweitern*. Um schließlich Gleichungen der Art $x^n = a$ (mit positivem a) lösen zu können, also letztlich um Wurzeln ziehen zu können, muss man eine zusätzliche Erweiterung durchführen und die reellen Zahlen einführen.

Abgeschlossenheit einer Zahlenmenge bezüglich einer Verknüpfung

Zahlen kann man auf verschiedene Weise miteinander „verknüpfen“, z. B. kann man sie addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Als Verallgemeinerung schreiben wir hier für eine solche Verknüpfung allgemein das Zeichen $\circ$. (Beispiel: $5 \circ 2$ kann für 5 + 2, 5 – 2, 5 · 2 oder 5 : 2 stehen.)

Eine Zahlenmenge heißt abgeschlossen bezüglich einer Verknüpfung, wenn für alle Zahlen x und y aus der Menge gilt, dass $x \circ y$ auch wieder eine Zahl aus der Menge ist.

Beispiele:

- Die natürlichen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung +, weil für alle natürlichen Zahlen x und y die Zahl x + y wieder eine natürliche Zahl ist. Außerdem sind die natürlichen Zahlen auch abgeschlossen bezüglich ·.
- Die natürlichen Zahlen sind dagegen nicht abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung –, weil es natürliche Zahlen x und y gibt, sodass x – y *keine* natürliche Zahl ist (Beispiel: 1 und 2 sind natürliche Zahlen, aber 1 – 2 = -1 ist keine natürliche Zahl). Sie sind auch nicht abgeschlossen bezüglich : (Beispiel: 1 : 2 = 0,5 ist keine natürliche Zahl).
- Die ganzen Zahlen dagegen sind abgeschlossen bezüglich +, – und ·. Sie sind aber nicht abgeschlossen bezüglich :, da z. B. 1 : 2 = 0,5 keine ganze Zahl ist.
- Die rationalen Zahlen (ohne Null!) sind dagegen abgeschlossen bezüglich aller vier Grundverknüpfungen +, –, · und :.

Um die Grundrechenarten mit allen Zahlen ausführen zu können, musste man also den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen schrittweise *erweitern*. Um schließlich Gleichungen der Art $x^n = a$ (mit positivem a) lösen zu können, also letztlich um Wurzeln ziehen zu können, muss man eine zusätzliche Erweiterung durchführen und die reellen Zahlen einführen.