Lösungen III.1

a) Allgemeine Definition

231/8 1,20 €

231/9 a) Man muss alle Möglichkeiten durchprobieren (er stellt 10 Portionen her, oder 15, oder 30, ...) und jeweils den Erwartungswert für den Gewinn berechnen. Ergebnis: Er muss 30 Portionen herstellen, der Gewinn ist dann 47,50 €.

231/10 E(X) = 0 € ==> fair

231/11 2,50 €

231/12 $\approx$16,37 €

231/13 a) –0,20 € b) um 0,20 € verringern

231/14 E(X) = 50 € (Auszahlung; der Gewinn ist dann natürlich 32 €)

232/15 $E(X) = 4\frac{1}{12}$

232/16 a) $\approx -0{,}54$ € b) $\approx -0{,}54$ € c) $\approx -1{,}08$ €

232/17

a) $E(X) = 3{,}5$; $E(X^*) = 7{,}5$

b) $E(X^*) = E(X + a) = \sum_i (x_i + a)\, P(X = x_i) = \sum_i x_i\, P(X = x_i) + \sum_i a\, P(X = x_i)$

$= E(X) + a \cdot \sum_i P(X = x_i) = E(X) + a \cdot 1 = E(X) + a$

232/18 (gemeint ist hier wohl nur ein Würfel!)

a) $E(X) = -1/6$; $E(X^*) = -1/3$

b) $E(X^*) = E(a \cdot X) = \sum_i (a \cdot x_i)\, P(X = x_i) = a \cdot \sum_i x_i\, P(X = x_i) = a \cdot E(X)$

232/19 a) $E(X_1) = 3{,}5$; $E(X_2) = 7/3$; $E(X) = 35/6$

b) Aufgabenstellung falsch! (1) Ergebnisraum, nicht Ereignisraum! (2) Voraussetzung ergibt so keinen Sinn! richtig: „...sodass für alle $\omega \in \Omega$ gilt, dass $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$ ist, ..." !

damit: $E(X) = \sum_i x_i\, W(x_i) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\, P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} \big(X_1(\omega) + X_2(\omega)\big)\, P(\{\omega\})$

$= \sum_{\omega\in\Omega} X_1(\omega)\, P(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} X_2(\omega)\, P(\{\omega\}) = E(X_1) + E(X_2)$

b) speziell: Binomialverteilung

234/32 26) 16 27) 5 28) 50 (40) 29) a) 40 b) 64 c,d) 80 30) 10 31) 30

234/33 84

234/36

Hinweis beachten: $P(X = k) > P(X = k-1)$

zusätzlich Hinweis aus Aufgabe 34 beachten ==> $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} > 1$

Rekursionsformel aus Aufgabe 34 einsetzen ==> $\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} > 1$

mit Nenner multiplizieren, q = 1–p einsetzen ==> $(n-k+1) \cdot p > k \cdot (1-p)$

nach k auflösen ==> $k < np + p$

Formel für Erwartungswert einsetzen ==> $k < E(X) + p$
ebenso folgt: $P(X = k) < P(X = k-1)$ für $k > E(X) + p$
d.h. für $k = E(X) + p$ nimmt die Binomialverteilung ihr Maximum an
wegen $0<p<1$ ist die Abweichung der wahrscheinlichsten Trefferanzahl vom Erwartungswert also höchstens 1 ==> Behauptung

Lösungen III.2

a) Allgemeine Definition
231/9 b) $Var(X) = 135{,}6875$; $\sigma \approx 11{,}65$

231/10 $\sigma \approx 6{,}77$ 232/15 $\sigma \approx 2{,}83$

232/16 d) a) $\approx 399{,}71$ b) $\approx 788{,}90$ c) $\approx 1209{,}64$

232/17 a) $Var(X) = Var(X^*) = 35/12$
b) $Var(X^*) = E(\,(X^* - E(X^*)\,)^2\,) = E(\,(\,(X + a) - (E(X) + a)\,)^2\,) = E(\,(\,X - E(X)\,)^2\,) = Var(X)$
==> $\sigma^* = \sigma$

232/18 ***Aufgabe falsch formuliert, Var mit σ vertauscht!***
a) $Var(X) = 169/72$; $Var(X^*) = 169/18$
b) $Var(X^*) = E(\,(X^* - E(X^*)\,)^2\,) = E(\,(\,(a\cdot X - (a\cdot E(X)\,)\,)^2\,) = E(\,a^2 \cdot (\,X - E(X)\,)^2\,)$
$= a^2 \cdot E(\,(X - E(X)\,)^2\,) = a^2 \cdot Var(X)$ ==> $\sigma^* = a\cdot\sigma$

232/20
$\sum_i P(X = x_i) = 1$ ==> $0{,}1 + a + b + c + 0{,}3 = 1$ I
$F(1) = 2$ ==> $0{,}1 + a = 0{,}2$ II
$E(X) = 3{,}4$ ==> $-1\cdot 0{,}1 + 1\cdot a + 2\cdot b + 4\cdot c + 6\cdot 0{,}3 = 3{,}4$ III
==> ... $a = 0{,}1$; $b = 0{,}2$; $c = 0{,}3$ ...... ==> $\sigma \approx 2{,}24$

b) Die Verschiebungsformel *s.o.*
232/17
b) $E(X^{*2}) = E(\,(X + a)^2\,) = E(X^2 + 2aX + a^2)$
mit Aufgaben 18 und 19 folgt: $= E(X^2) + 2a\,E(X) + a^2$
$Var(X^*) = E(X^{*2}) - (\,E(X^*)\,)^2 = (E(X^2) + 2a\,E(X) + a^2) - (\,E(X) + a)^2$
$= \ldots = E(X^2) - (\,E(X)\,)^2 = Var(X)$

232/18 ***Aufgabe falsch formuliert, Var mit σ vertauscht!***
b) $Var(X^*) = E(X^{*2}) - (\,E(X^*)\,)^2 = E(\,(a\cdot X)^2\,) - (a\cdot E(X)\,)^2 = E(a^2\cdot X^2) - a^2\cdot(\,E(X)\,)^2$
$= a^2 \cdot E(X^2) - a^2\cdot(\,E(X)\,)^2 = a^2 \cdot (\,E(X^2) - (\,E(X)\,)^2\,) = a^2\cdot Var(X)$ ==> $\sigma^* = a\cdot\sigma$

c) speziell: Binomialverteilung
234/32
26) 3,2; ≈1,79 27) 3,75; ≈1,94 28) 25; 5 (20; ≈4,47)
29) a) 8; ≈2,83 b) 12,8; ≈3,58 c,d) 16; 4 30) 8; ≈2,83 31) 21; ≈4,58

234/37
a) zwischen 976 und 984 *kann man auch für (b) und (c) verwenden!*
b) P≈0,027: dies ist sehr unwahrscheinlich, man sollte die Lieferung also zurückweisen
c) P≈0,35544: dies ist recht wahrscheinlich, man sollte die Lieferung also annehmen

Lösungen III.3

a) Standarisierung und Näherung der Binomialverteilung

247/1

a) $P \approx 0{,}05566$; $B(85;\frac{1}{6};10) \approx 0{,}05961$ ($\sigma \approx 3{,}44 > 3$)

b) $P \approx 0{,}09913$; $B(99;\frac{1}{6};15) \approx 0{,}10224$ ($\sigma \approx 3{,}71 > 3$)

c) $P \approx 0{,}04521$; $B(520;\frac{1}{6};89) \approx 0{,}04470$ ($\sigma \approx 8{,}50 > 3$)

d) $P \approx 0{,}04523$; $B(230;\frac{1}{6};33) \approx 0{,}04710$ ($\sigma \approx 5{,}65 > 3$)

247/2 e) $\approx 2{,}71 \cdot 10^{-5}$ ($\sigma \approx 5{,}75 > 3$) f) $\approx 2{,}454 \cdot 10^{-26}$ ($\sigma \approx 6{,}99 > 3$)

247/6 d) $\approx 0{,}02232$ ($\sigma \approx 13{,}7 > 3$)

249/19 a) $\approx 0{,}04944$ ($\sigma \approx 6{,}04 > 3$)

b) Näherung der kumulierten Binomialverteilung

247/2 a) $\approx 0{,}98303$ ($\sigma \approx 4{,}90 > 3$) b) $\approx 0{,}99998$ ($\sigma \approx 6{,}15 > 3$)
c) ≈ 0 ($\sigma \approx 6{,}95 > 3$) d) ≈ 1 ($\sigma \approx 4{,}35 > 3$)

247/4

a) $\approx 0{,}10204$ ($\sigma \approx 1{,}58 < 3$! Bernoulli: $\approx 0{,}10832$)

b) $\approx 0{,}03920$ ($\sigma \approx 3{,}13 > 3$)

247/6 ($\sigma \approx 13{,}7 > 3$) a) $\approx 0{,}24510$ b) $\approx 0{,}01287$ c) $\approx 0{,}98559$

247/7 P(„bei höchstens 262 nicht wirksam") $\approx 0{,}791$ ==> gut möglich ($\sigma \approx 15{,}4 > 3$)

247/8 ($\sigma \approx 3{,}70 > 3$) a) $\approx 0{,}1736$ b) $\approx 0{,}6355$

247f/9 $\approx 0{,}95352$ ($\sigma \approx 14{,}6 > 3$)

248/10 a) $\approx 0{,}92116$ ($\sigma \approx 118 > 3$) b) $\approx 0{,}99520$ ($\sigma \approx 109 > 3$)
c) $\approx 0{,}99158$ ($\sigma \approx 41{,}7 > 3$)

248/12 $\sigma \approx 9{,}35 > 3$
vor der Absprache: beide $\approx 0{,}4801$
nach der Absprache: P(„Schmitz gewinnt") $\approx 0{,}99560$; P(„Zabel gewinnt") $\approx 0{,}00440$

249/16 a) 138 b) $\approx 0{,}99477$ ($\sigma \approx 3{,}32 > 3$)

249/17 a) $\approx 0{,}93574$ ($\sigma \approx 6{,}93 > 3$)

249/19 b) $\approx 0{,}20045$ ($\sigma \approx 6{,}04 > 3$) c) $\approx 0{,}14511$ (Laplace!)

c) Symmetrische Intervalle um den Erwartungswert

247/3 $\approx 0{,}73728$ ($\sigma \approx 4{,}90 > 3$)

248/11 Bernoulli: $\approx 0{,}67659$; Näherung: $\approx 0{,}71538$ ($\sigma \approx 7{,}07 > 3$)

248/13 a) 12; 11,52; $\sigma \approx 3,39 > 3$ b) $\approx 0,74986$

248/14 ($\sigma \approx 323 > 3$) a) [173661; 174956] b) [39,83%; 40,13%]

248/15 [32,24%; 34,43%] ($\sigma \approx 40,4 > 3$)

d) Berechnung der Kettenlänge
248/13
c) höchstens 1 ($\sigma \approx 0,196 < 3$! Bernoulli verwenden!)
bzw. höchstens 2 ($\sigma \approx 0,28 < 3$! Bernoulli verwenden!)

249/16 c) mindestens 225 ($\sigma \approx 4,07 > 3$)

249/17 b) höchstens 357 ($\sigma \approx 7,56 > 3$) c) mindestens 324 ($\sigma \approx 7,2 > 3$)

249/18 mindestens 2131 ($\sigma \approx 22,6 > 3$)

249/19 d) höchstens 485 ($\sigma \approx 5,97 > 3$)

249/20 mindestens 4057 ($\sigma \approx 6,34 > 3$)

Lösungen III.4

249f/21 a) $\approx$ 44,038% b) $\approx$ 42,074% c) $\approx$ 1,960 (mm)

250/22 19

250/23 a) $\approx$ 2638 b) $\approx$ 3,6, also: 3 c) $\approx$ 61

250/24 a) $\approx$ 211 b) $\approx$ 134 c) $\approx$ 766 d) 0

250/25 a) $\approx$ 0,99180 b) $\approx$ 4480

250/26 $P(|X-\mu| < n\cdot\sigma) = \ldots = 2\cdot\Phi(n) - 1$ ==> ... Behauptungen

250/27
a) $\approx$ 0,38292 b) $\approx$ 0,84134 c) $c \approx 47,66$ d) $b \approx 3,92$
e) Grenzen des Normbereichs verschieben sich um +0,2

Lösungen III.5

a) Einseitiger Signifikanztest
264/1 a) H_0: $p \leq 0,05$; H_1: $p > 0,05$ c) nein d) nein
b) ***gemeint ist: „…wenn ab 4 falschen Apfelsinen die Nullhypothese abgelehnt wird.“***
➔ 0,0159

264/2 a) H_0: $p \leq 0,75$; H_1: $p > 0,75$ b) $\approx$ 0,14883 c) mindestens 83

264/3 a) H_0: $p \geq 0,9$; H_1: $p < 0,9$ b) $\overline{A} = \{0; \ldots; 15\}$ c) $\approx$ 0,00935

264/4 kein unlauterer Wettbewerb ($\alpha' \approx 0{,}06661 > 5\%$; oder: $42 \notin \overline{A}$)

264/5 ja ($\alpha' \approx 0{,}01001 < 5\%$; oder: $18 \in \overline{A}$)

264f/6 a) $\approx 0{,}0245$ b) $\approx 0{,}11173$ c) höchstens 1

265/7 a) $A = \{54; ...; 100\}$ (Bernoulli) b) $A = \{286; ...; 500\}$ ($\sigma \approx 10{,}95 > 3$)

265/9 Tugba hat wohl recht ($\alpha' \approx 0{,}00013$ mit $\sigma' \approx 6{,}7 > 3$)

265/11 a) nein ($\alpha' \approx 0{,}10204 > 4\%$ mit $\sigma' \approx 9{,}0 > 3$) b) $\approx 0{,}78413$ (Bernoulli)

266/13 X: Anzahl der richtig vorhergesagten Karten
a) H_0: $p \leq 0{,}25$; H_1: $p > 0{,}25$
b) Fehler 1. Art: Man nimmt an, dass er ein Hellseher ist, obwohl er es nicht ist.
Fehler 2. Art: Man nimmt an, dass er kein Hellseher ist, obwohl er es doch ist.
c) $A = \{0; ...; 35\}$; $\overline{A} = \{36; ...; 100\}$ (Bernoulli)

266/14 b) $A = \{0; ...; 80\}$; $\overline{A} = \{81; ...; 100\}$ (Bernoulli)

266/15 a) $A = \{0; ...; 72\}$; $\overline{A} = \{73; ...; 80\}$ ($\sigma \approx 3{,}58 > 3$)

266/16 $\alpha' \approx 16{,}368\%$ (Bernoulli) ==> ein Irrtum ist noch recht wahrscheinlich

266/17 $\overline{A} = \{0; ...; 46\}$ ($\sigma \approx 3{,}62 > 3$)

266f/18
a) (Bernoulli) i) $\approx 0{,}03333$ ii) $\approx 0{,}25029$ iii) $\approx 0{,}56880$
b) i) 100 ii) mindestens 15 ($\sigma \approx 1{,}16 < 3$! Bernoulli (Tk): stimmt!)
c) i) 0,1675 ii) $\approx 0{,}537$ iii) 98 500 € (?)
e) $A = \{0; ...; 23\}$; $\overline{A} = \{24; ...; 80\}$ ($\sigma \approx 3{,}58 > 3$)

268/27 a) $A = \{0; ...; 16\}$; $\overline{A} = \{17; ...; 20\}$ (Bernoulli) b) nein

Alternativtest
265/12 a) $\approx 7{,}6\%$ ($\sigma \approx 3{,}84 > 3$) b) $\approx 0{,}02118$ ($\sigma \approx 5{,}18 > 3$)

266/13 d) $\beta' \approx 0{,}176\%$ (Bernoulli) 266/15 b) $\beta' \approx 57{,}535\%$ ($\sigma \approx 2{,}68 < 3$!)

266f/18
d) $A = \{0; ...; 10\}$; $\overline{A} = \{11; ...; 100\}$ ($\sigma \approx 2{,}37 < 3$! Bernoulli (Tk): stimmt!)
falls $p = 0{,}1$ ==> $\beta' \approx 58{,}316\%$

267/19
a) $\alpha' \approx 7{,}78\%$ ($\sigma \approx 3{,}87 > 3$); $\beta' \approx 0$ ($\sigma \approx 4{,}38 > 3$) b) $A = \{0; ...; 53\}$; $\overline{A} = \{54; ...; 80\}$

267/20
a) $\alpha' \approx 0{,}621\%$ ($\sigma \approx 3{,}39 > 3$); $\beta' \approx 22{,}965\%$ ($\sigma \approx 4{,}70 > 3$)
b) $A = \{0; ...; 18\}$; $\overline{A} = \{19; ...; 300\}$

267/21

a) $\alpha' \approx 62{,}965\%$ (Bernoulli); $\beta' \approx 4{,}317\%$ (Bernoulli)

b) $\overline{A} = \{0; 1\}$; $A = \{2; ...; 20\}$; $\beta' \approx 60{,}825\%$ (Bernoulli)

267/22 $\overline{A} = \{5; ...; 20\}$; $\beta' \approx 5{,}095\%$ (Bernoulli)

268/23

a) 1. Art: Man denkt, das Verhältnis sei 7:3, obwohl es 3:7 ist. $\alpha' \approx 15{,}027\%$ (Bernoulli)

2. Art: Man denkt, das Verhältnis sei 3:7, obwohl es 7:3 ist. $\beta' \approx 4{,}735\%$ (Bernoulli)

b) $A = \{0; 5\}$; $\overline{A} = \{6; ...; 10\}$; $\beta' \approx 15{,}027\%$ (Bernoulli)

c) $\sigma < 3$ ==> Näherung nicht sinnvoll! durchprobieren mit Binomialverteilung ergibt: nicht möglich!

268/24

a) bei mindestens 9 defekten Teilen; $\beta' \approx 66{,}810\%$ (Bernoulli)

b) Es ist mit dieser Entscheidungsregel sehr wahrscheinlich, dass die Lieferung 15% Ausschuss hat, obwohl angenommen wird, dass es nur 10% sind.

Risiko verringern: mehr Teile entnehmen (z. B. $n = 200$ ==> $\beta' \approx 24{,}797\%$)

oder Signifikanzniveau erhöhen (z. B. $\alpha \approx 30\%$ ==> β' etwa gleich groß)

268/25

a) $\alpha' \approx 19{,}579\%$ (Bernoulli); $\beta' \approx 2{,}069\%$ (Bernoulli)

b) $A = \{0; ...; 6\}$; $\overline{A} = \{7; ...; 20\}$ (Bernoulli)

c) durch Probieren: $A = \{0; ...; 7\}$, $\overline{A} = \{8; ...; 20\}$ führt auf $\alpha' \approx 3{,}21\%$, $\beta' \approx 13{,}16\%$

268/26

$\alpha' \approx 19{,}579\%$ (Bernoulli); $\beta' \approx 2{,}069\%$ (Bernoulli)

==> Die Wahrscheinlichkeit, zu denken, dass eine Kiste 2. Wahl ist, obwohl sie in Wirklichkeit 1. Wahl ist, ist recht hoch!

$A = \{0; ...; 14\}$; $\overline{A} = \{15; ...; 100\}$ (Bernoulli)

c) Zweiseitiger Signifikanztest

265/8 $A = \{533; ...; 587\}$ ($\sigma \approx 12{,}96 > 3$)

265/10 a) $\alpha' \approx 0{,}40423$ (Bernoulli) b) $A = \{5; ...; 16\}$ (Bernoulli)

266/14 a) $\alpha' \approx 0{,}04787$ (Bernoulli)