<u>Lösungen III.1</u>

a) Allgemeine Definition

224/1

a) $E(X) = \frac{3}{4}$

b) $E(X) = 0$

c) $E(X) = 2{,}875$

d) $E(X) = -\frac{2}{3}$

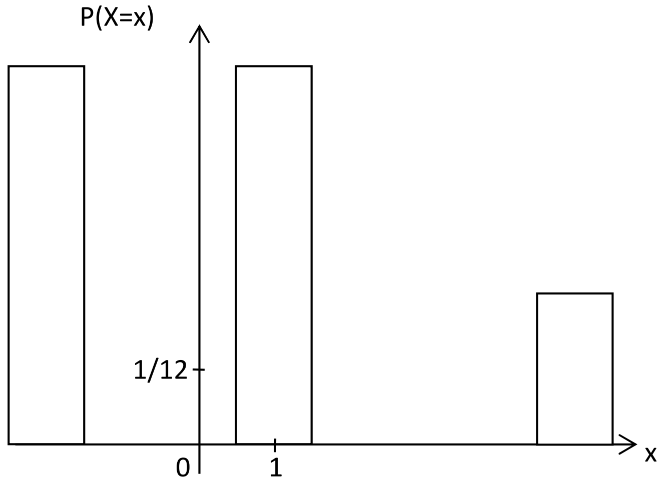
224/4 $E(X) = 4\frac{1}{12}$

224/5 a) $\approx -0{,}54$ € b) $\approx -0{,}54$ € c) $\approx -1{,}08$ €

224/6

a)

x	–2	1	5
P(X=x)	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$



b) $0{,}41\overline{6}$ € pro Spiel

232/4

a) bei beiden Spielen: 1 €

b) Bei Spiel 1 ist die Varianz etwa 2,82 €, bei Spiel 2 etwa 7,07 €. Bei Spiel 2 ist die Wahrscheinlichkeit, dass Marie Verlust macht (und die Höhe des möglichen Verlusts), also deutlich höher als bei Spiel 1.

232/7 $\approx 16{,}37$ €

224/2 1,20 €

224/3

a)

x	1	0,3	0,2	–0,8
P(X=x)	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{4}$

b) Einsatz: $\frac{1}{70}$ €, also 1 bis 2 Cent

232/5 blau: Bleistifte; grün: Kaffeetassen; rot: T-Shirts; 2 € Einsatz

233/8 2,50 €

b) speziell: Binomialverteilung

231/6 b) ≈ 0,48901

Lösungen III.2

a) Allgemeine Definition

224/1

a) $E(X) = \frac{3}{4}$; $Var(X) = \frac{11}{16}$; $\sigma(X) \approx 0{,}8292$
b) $E(X) = 0$; $Var(X) = 30$; $\sigma(X) \approx 5{,}4772$
c) $E(X) = 2{,}875$; $Var(X) = 58{,}609375$; $\sigma(X) \approx 7{,}6557$
d) $E(X) = -\frac{2}{3}$; $Var(X) = \frac{14}{9}$; $\sigma(X) \approx 1{,}2472$

224/4 $E(X) = 4\frac{1}{12}$; $\sigma(X) \approx 2{,}83$

224/5 d) a) ≈ 399,71 b) ≈ 788,90 c) ≈ 1209,64

224/8

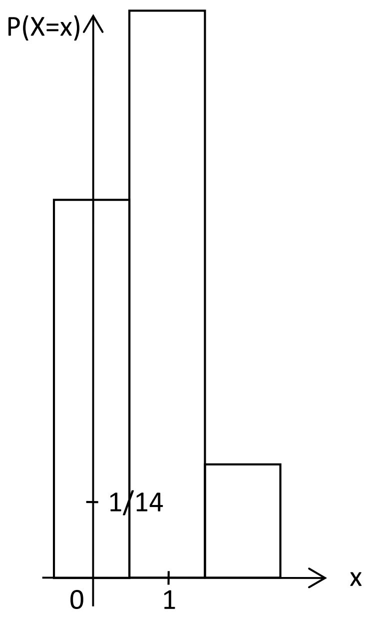
a) falsch (Die Varianz ist eine Summe mit lauter nicht-negativen Summanden.)
b) wahr (z. B. könnten alle Zufallswerte negativ sein, dann wäre der Erwartungswert eine Summe mit lauter negativen Summanden)
c) wahr (siehe Formel, darin kommt der Erwartungswert ja vor!)
d) falsch (für $Var(X) < 1$ ist $\sigma(X)$ größer als $Var(X)$)
e) falsch (z. B. für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $P(X=a) = 1$, $P(X\neq a) = 0$ mit beliebigem $a \in \mathbb{R}$ ist $E(X) = a$, kann also beliebig groß werden, aber $Var(X)$ ist immer = 0)

232/1

a)

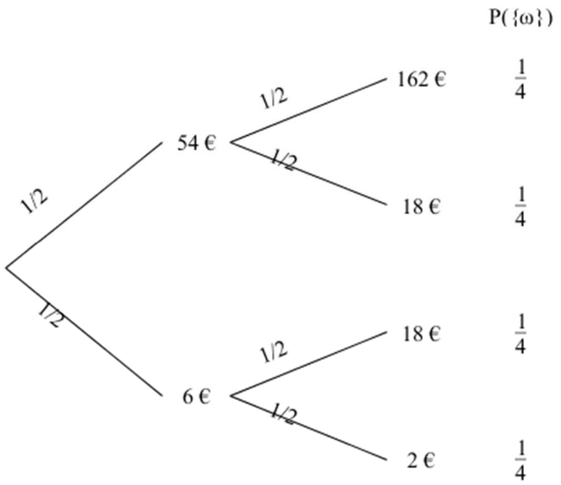
x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

b) $E(X) = 0{,}75$; $\sigma(X) \approx 0{,}6339$



233/11

a) b) $E(X) = 50$; $\sigma(X) \approx 64{,}99$



x in €	2	18	162
P(X=x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

233/12

X: Kosten pro Woche in € (Annahme: pro Woche tritt jeweils nur eine Art von Störung auf! Ansonsten wird die Aufgabe sehr aufwendig… es wären 32 Ergebnisse zu beachten!)

a)

x	2400	4200	750	7500	1500
P(X=x)	0,15	0,1	0,45	0,1	0,2

b) 2167,50 €   c) 0,45   d) $Var(X) = 4\,258\,068{,}75$ €²; $\sigma(X) \approx 2063{,}51$ €

224/7 $a = 0{,}3$; $b = 0{,}1$; $\sigma(X) \approx 1{,}6047$

b) Die Verschiebungsformel   *s.o.*

c) speziell: Binomialverteilung

231/9 $\approx 0{,}63180$ bzw. $\approx 0{,}94312$ bzw. $\approx 0{,}99648$

231/10 $\approx 0{,}69268$

233/13

a) $\approx 0{,}80421$ b) $E(X) = 16$; $Var(X) = 3{,}2$; $\sigma(X) \approx 1{,}7889$ c) $\approx 0{,}59812$

234/14

a) zwischen 976 und 984

b) mit dem Ergebnis aus (a): Man sollte die eine Charge zurückweisen, die andere annehmen.

234/16   a) $\approx 0{,}27623$ b) $\approx 0{,}73098$

234/15

Diese Aufgabe ist eigentlich unlösbar, denn die Sigma-Regeln stehen nicht mehr im Lehrplan!

a) A: Anzahl funktionierende: zwischen 24 197 und 24303 (2σ um Erwartungswert)
➔ Reparaturkosten für die 697 bis 803 defekte: zwischen 8364,00 € und 9636,00 €
mit Einkaufskosten insgesamt: zwischen 630 864 € und 632 136 €
B: ... mit Einkaufskosten insgesamt: zwischen 632 288 € und 633 212 €
➔ Entscheidung für A

b) ja, denn 25 000 – 535 = 24465 liegt zwischen 24 456 und 24 544 (2σ um Erwartungswert)

Lösungen III.3

245/1

a) H_0: p = 0,05 („Nur 5% der Apfelsinen weisen Mängel auf.''); H_1: p > 0,05 („Mehr als 5% der Apfelsinen weisen Mängel auf.'')

b) ***gemeint ist: „…wenn ab 4 faulen Apfelsinen die Nullhypothese abgelehnt wird.''*** ➔ α' ≈ 0,0159

c) $\bar{A}$ = {4; …; 20}

d) Es wird angenommen, dass wirklich nur 5% der Apfelsinen Mängel aufweisen, obwohl es in Wirklichkeit mehr sind. β' ist nicht berechenbar, weil p_1 nicht bekannt ist.

245/2

a) H_0: p = 0,75 („Das neue Medikament ist ebenfalls bei 75% der Anwendungsfälle erfolgreich.'')
H_1: p > 0,75 („Das neue Medikament ist bei mehr als 75% der Anwendungsfälle erfolgreich.'')

b) α' ≈ 0,14883

c) $\bar{A}$ = {83; …; 100}; wenn das neue Schmerzmittel bei 83 Patienten wirkt, ist die Nullhypothese also abzulehnen, d. h. man darf davon ausgehen, dass das neue Medikament besser ist als das bisherige.

d) α' ≈ 0,03763 < 5%

245/3

a) Anzahl der Personen von 100 Befragten, die der Nutzung der Windenergie zustimmen
H_0: „30% stimmen der Windenergie zu.''

b) α' ≈ 0,16286

c) Man nimmt an, dass wirklich nur 30% der Nutzung der Windenergie zustimmen, obwohl es in Wirklichkeit mehr sind. β' wird größer, wenn α' verkleinert wird.

d) $\bar{A}$ = {39; …; 100}; bei 38, die für die Nutzung von Windenergie sind, kann die Nullhypothese auf dem 4%-Niveau also noch nicht abgelehnt werden.

245/4

a) X: Anzahl der lebenden Würmer von 20 untersuchten
H_0: „90% der Würmer leben.''

b) $\bar{A}$ = {0; ...; 15}

c) α' ≈ 0,00935

245/5

kein unlauterer Wettbewerb (α' ≈ 0,06661 > 5%; oder: 42 ∉ $\bar{A}$)

246/6

a) linksseitiger Signifikanztest

b) X: „Anzahl der verkäuflichen Früchte von 50 untersuchten"

H_0: „90% der Früchte sind verkäuflich."

H_1: „Weniger als 90% der Früchte sind verkäuflich."

c) $\alpha' \approx 0{,}12215$

d) A = {41, …, 50}

246/7 A = {54; ...; 100}

246/8

$\alpha' \approx 0{,}01633$, es ist also sehr unwahrscheinlich, dass es nur eine zufällige Abweichung war, d. h., er ist wohl wirklich schlechter als behauptet

246/9 a) $\alpha' \approx 0{,}18002$ b) $\beta' \approx 0{,}58307$

246/10

a) X: „Anzahl der Karten von 100, die richtig vorhergesagt wurden"

b) H_0: „25% der Karten werden richtig vorhergesagt."

H_1: „Mehr als 25% der Karten werden richtig vorhergesagt."

c) Fehler 1. Art: Man nimmt an, dass er ein Medium ist (dass er mehr als 25% der Karten richtig vorhersagen kann), obwohl er in Wirklichkeit keins ist.

Fehler 2. Art: Man nimmt an, dass er kein Medium ist (dass er nur 25% der Karten richtig vorhersagen kann), obwohl er in Wirklichkeit ein Medium ist.

d) Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn er mindestens 36 Karten richtig vorhersagt.

e) $\beta' \approx 0{,}00176$

246/11

a) X: „Anzahl der Patienten von 50 getesteten, die mit dem neuen Verfahren geheilt werden"

H_1: „Mehr als 80% der Patienten werden geheilt."

b) k = 46, d. h. bei mehr als 46 geheilten Patienten von 50 kann die Nullhypothese abgelehnt werden, man kann also davon ausgehen, dass das neue Verfahren tatsächlich mehr heilt als die klassische Therapie.

c) Die Nullhypothese kann dann nicht abgelehnt werden, man kann also nicht folgern, dass das neue Verfahren tatsächlich mehr Patienten heilt als die klassische Therapie.

247/12 $\alpha' \approx 0{,}16368$ ➔ ein Irrtum ist noch recht wahrscheinlich

247/13 ab 13 defekten

247/14

$a_1) \approx 0{,}03333$ $a_2) \approx 0{,}25029$ $a_3) \approx 0{,}56880$

b_1) E(X) = $n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}1 = 100$

b_2) *Vorsicht: hier ist **nicht** n = 1000 und auch nicht $n \geq 12$, sondern n ixst gesucht!*

X: Anzahl der fehlerfreien Filter ➔ X ist B(n;0,9)-verteilt, wobei n die Stichprobengröße ist (also wie viele Filter man entnimmt)

$P(X \geq 12) \geq 90\%$ ➔ $1 - P(X \leq 11) \geq 0{,}9$ ➔ $P(X \leq 11) \leq 0{,}1$➔ $\sum_{i=0}^{11} B(n; 0{,}9; i) \leq 0{,}1$

Buch: $F_{0{,}9}^{14}(11) = \sum_{i=0}^{11} B(14; 0{,}9; i) = 0{,}1584$; TW: $\sum_{i=0}^{11} B(15; 0{,}9; i) = 0{,}05556$

d. h. für n = 14 ist die Bedingung $\sum_{i=0}^{11} B(n; 0{,}9; i) \leq 0{,}1$ noch nicht erfüllt, aber für n = 15, man muss also mindestens 15 Filter entnehmen.

c) Die Nullhypothese (Behauptung der Firma) kann abgelehnt werden, wenn mindestens 10 Filter Ausschuss sind.
$\alpha' \approx 0{,}02819$

247/15
a) Umfrage durchführen, ……? Stichprobe möglichst groß und repräsentativ wählen
b) X: „Anzahl der Smartphone-User von … befragten, die die Standortübermittlung dauerhaft nutzen‘‘
c) z. B. n = 100, sinnvoller ist wohl n = 200
d) Keine allgemeine Lösung möglich, machen Sie mal.

247/16
a) wahr (immer A = {0, … k}, denn wenn es wirklich nur 0 sein sollten, dann sind es ja offensichtlich nicht mehr als behauptet, also kann die Gegenhypothese nicht stimmen)
b) falsch; das gilt nur dann, wenn $k \in \bar{A}$ ist
c) In der Schule ist das wahr, im Allgemeinen falsch.
d) falsch: α' wird kleiner (bei konstantem p und k/n, ansonsten ist keine Aussage möglich)
e) wahr
f) falsch – siehe z. B. den Vergleich auf S. 244
g) wahr

248/17
a) bessere Formulierung: „Anzahl der defekten Nägel unter den 200 geprüften‘‘
b) H_1: $p > 0{,}02$
$\bar{A} = \{k+1; ...; 200\}$
$P(X \geq k+1) \leq 0{,}01$
$1 - P(X \leq k) \leq 0{,}01$
$k = 9$
Ablehnungsbereich von H_0: $\bar{A} = \{10; ...; 200\}$
c) D. h., aufgrund des Testergebnisses entscheidet man sich irrtümlich dafür, dass die Ausschussquote nicht höher als 2% ist.
d) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art wird größer.

248/18 a) rot und gelb b) gelb c) gelb und grün d) grün

248/19
$a_1) \approx 0{,}19687$ $a_2) \approx 0{,}69721$
b) X: „Anzahl der Schüler von 100 befragten, die das Gemälde nicht positiv beurteilen‘‘
H_0: „15% der Schüler beurteilen es nicht positiv.‘‘
$\bar{A} = \{24; ...; 100\}$