Lösungen II.1

a) Die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

175/1 a) Alle Wahrscheinlichkeiten sind ≥ 0, ihre Summe ist 1. b) 16 c) $\frac{3}{8}$

176/16
Axiom 1 erfüllt: alle P(E) sind ≥ 0
Axiom 2 erfüllt: $P(\Omega) = P(\{1;2;3\}) = 1$
Axiom 3 erfüllt: .... längliches Nachrechnen! insgesamt sind 13 Summen zu überprüfen!

176/17 Es wurde schon gezeigt: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ gilt für alle Ereignisse. Damit:
$P(A) > P(B) \implies -P(A) < -P(B) \implies 1 - P(A) < 1 - P(B) \implies P(\bar{A}) < P(\bar{B})$

b) Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

176/11
a) $P(E_1) = \frac{1}{21}; \ldots ; P(E_6) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ b) $P(E_7) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ c) $P(E_8) = \frac{11}{21}$ d) $P(E_9) = \frac{5}{21}$
e) $P(E_{10}) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

176/13 $P(\{1\}) = 0{,}4$; $P(\{4\}) = 0{,}25$

Blatt:

70) $P(A) = P(C) = \dfrac{6}{17}$; $P(B) = \dfrac{3}{17}$; $P(D) = \dfrac{2}{17}$

71) $P(A) = P(B) = 0{,}125$; $P(C) = P(D) = P(E) = 0{,}25$; a) 0,75 b) 0,25

175/6 a) 12,5% b) 70% c) 62,5% d) 40%

175/7?

	E_1	$\overline{E_1}$	Σ
E_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{E_2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Σ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

176/10
a)

	E_1	$\overline{E_1}$	Σ
E_2	0,1	0,4	0,5
$\overline{E_2}$	0,3	0,2	0,5
Σ	0,4	0,6	1

b) $\overline{E_1} = \{3;4;5;6\}$; $\overline{E_2} = \{1;5;6\}$; $E_1 \cup E_2 = \{1;2;3;4\}$; $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} = \{5;6\}$;
$\overline{E_1} \cup \overline{E_2} = \{1;3;4;5;6\}$; $E_1 \cap \overline{E_2} = \{1\}$; $\overline{E_1} \cap E_2 = \{3;4\}$
c) $P(\overline{E_1}) = 0{,}6$; $P(\overline{E_2}) = 0{,}5$; $P(E_1 \cup E_2) = 0{,}8$; $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 0{,}2$;
$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = 0{,}9$; $P(E_1 \cap \overline{E_2}) = 0{,}3$; $P(\overline{E_1} \cap E_2) = 0{,}4$

176/12

a) 50 haben sowohl A als auch B gekauft:

	A	$\overline{A}$	Σ
B	50	150	200
$\overline{B}$	200	100	300
Σ	250	250	500

b) 50% bzw. 40% c) 20%

176/14 $\frac{520}{570} \approx 91\%$ der Mädchen konnten die Aufgabe lösen

	J	M	Σ
A	180	520	700
$\overline{A}$	250	50	300
Σ	430	570	1000

Satz von Sylvester (für absolute Häufigkeiten):

$k(J \cup A) = 180 + 520 + 250 = 950$

$= k(J) + k(A) - k(J \cap A) = 430 + 700 - 180 = 950$

176/15 $\frac{2}{5}$ der Teilnehmer sollten dem Kabinenbahnbetreiber gemeldet werden:

	W	$\overline{W}$	Σ
K	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\overline{K}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
Σ	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

c) Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsvariablen

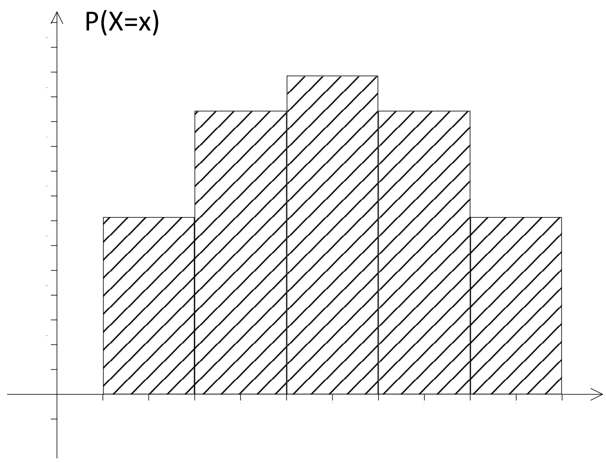
230/7 wenn man voraussetzt, dass jede Woche genau eine der Störungen auftritt: 45%

233/24 rot

4)

x	0	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	0	5c	8c	9c	8c	5c	0

$0 + 5c + 8c + 9c + 8c + 5c + 0 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{35}$



Lösungen II.2

175/2 mit A: „*nur* Anna erhält einen Punkt", B: „*nur* Berta erhält einen Punkt" folgt:
a) P(A) = $\frac{14}{36}$; P(B) = $\frac{15}{36}$ b) P(A) = $\frac{6}{36}$; P(B) = $\frac{7}{36}$

175/3 a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ 175/4 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$

175/8 $\frac{1}{36}$ bzw. $\frac{5}{36}$; 7

176/9 Wenn er Geld verliert, dann immer gleich seinen gesamten Einsatz – also ist die Antwort bei (a) und (b) gleich, nämlich $\frac{13}{37}$.

200/12 a) $\approx 9{,}92 \cdot 10^{-8}$ b) $\approx 4{,}96 \cdot 10^{-8}$

200/21 a) ≈ 0,229 b) ≈ 0,703 c) ≈ 0,920 200/22 a) ≈ 0,706

200/23 a) 0,25 b) ≈ 0,00714 c) 0,0875

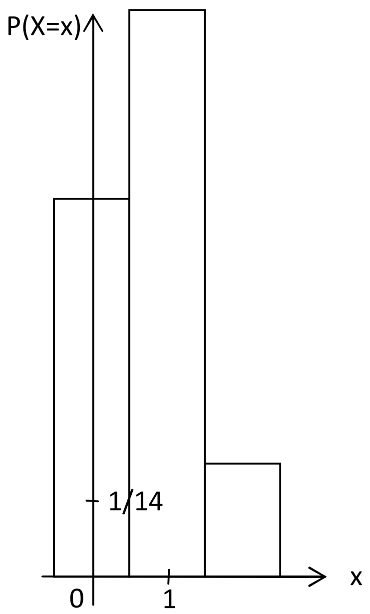
200/24 a) ≈ 0,00638 b) ≈ 0,9999967 c) ≈ 0,0769
201/28 a) $\frac{1}{120} \approx 0{,}83\%$ b) 0 202/34 $\frac{1}{24} \approx 4{,}17\%$

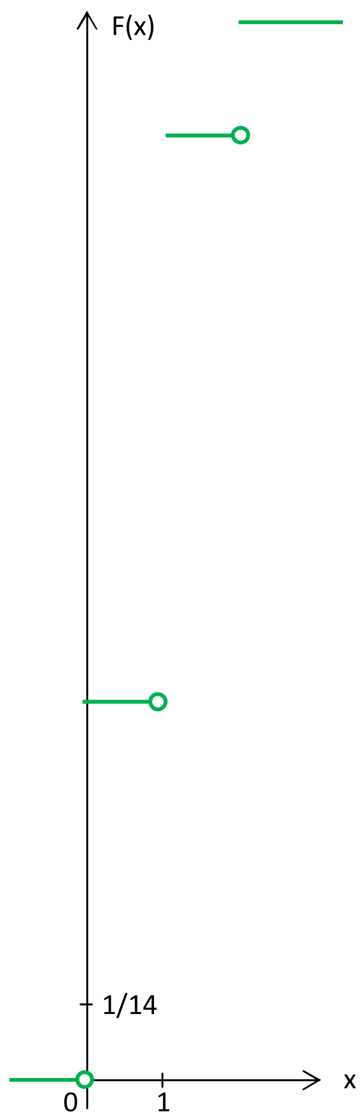
202/29 a) ≈ 0,0157 b) ≈ 0,0272 c) ≈ 0,000903 d) ≈ 0,0302

230/1

x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

x∈	]−∞; 0[	[0;1[	[1;2[	[2;∞[
F(x)	0	$\frac{10}{28}$	$\frac{25}{28}$	1



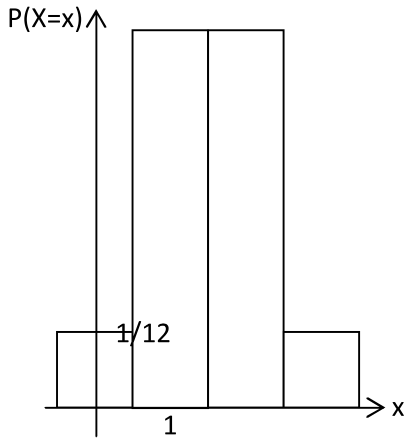


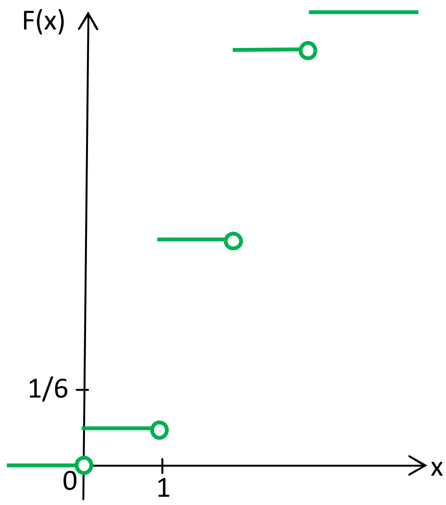
x∈	]−∞; 0[	[0;1[	[1;2[	[2;3[	[3;∞[
F(x)	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{11}{12}$	1

0

230/2

x	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$



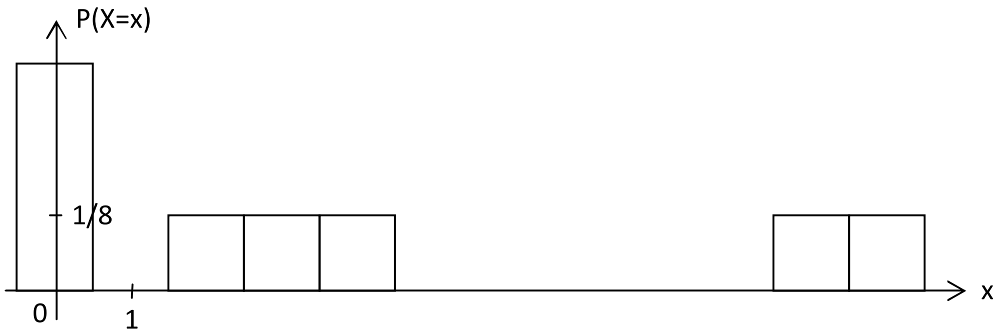


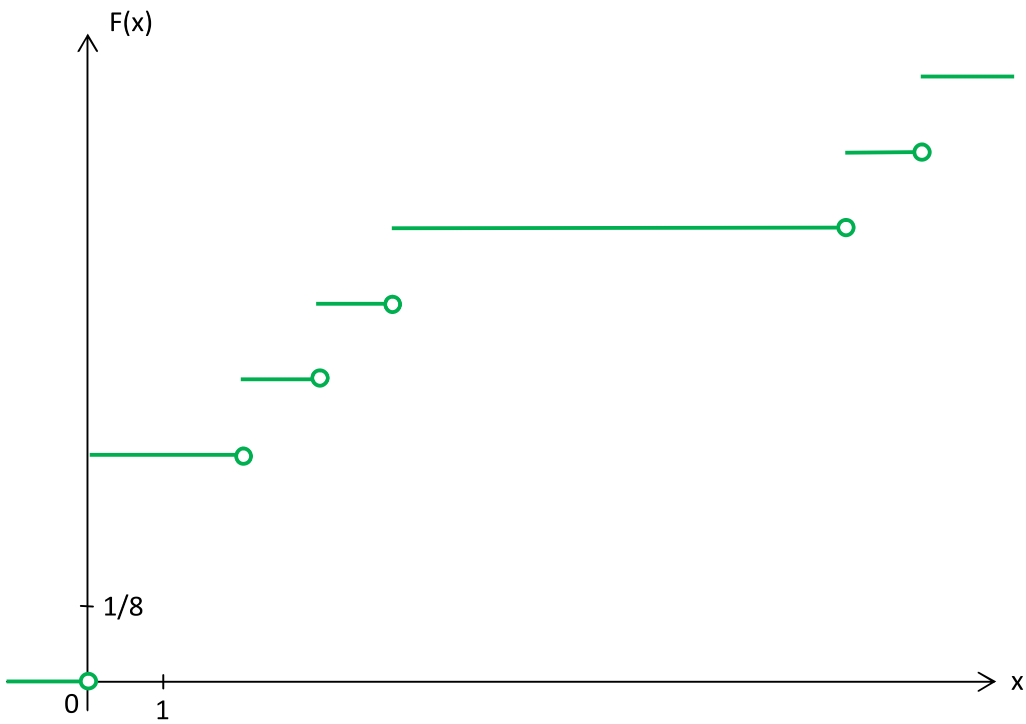
230/3

a)

x	0	2	3	4	10	11
P(X=x)	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b)





230/4 *Aufgabenstellung unklar: X = 5 ist vereinbar mit X = 2 und X = 10! i. F. angenommen, dass nur dann 5€, wenn kein Zweier- oder Dreierpasch*

x	–3	2	4	5	10
P(X=x)	$\frac{14}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

x∈	]–∞; –3[	[–3; 2[	[2;4[	[4;5[	[5;10[	[10;∞[
F(x)	0	$\frac{14}{36}$	$\frac{29}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

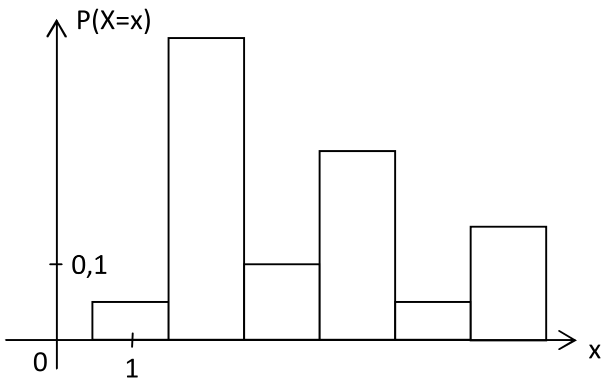
230/5 a) 20
b)

x	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P(X=x)	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

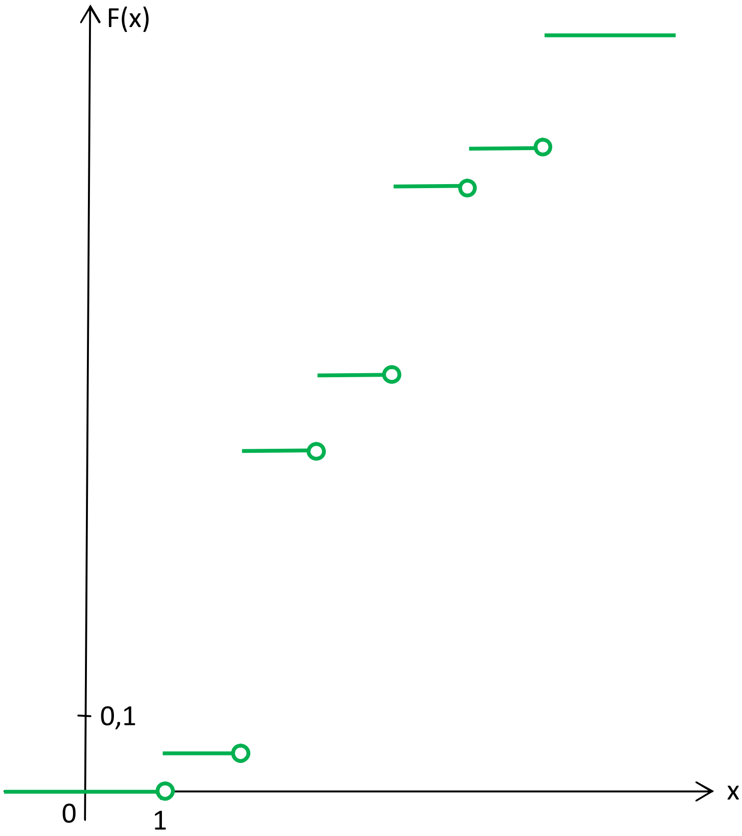
x∈	]–∞; 6[	[6; 7[	[7;8[	[8;9[	[9;10[	[10;11[	[11;12[	[12;13[	[13;14[	14;15[	[15;∞[
F(x)	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{19}{20}$	1

230/6
a)

x	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	$\frac{1}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

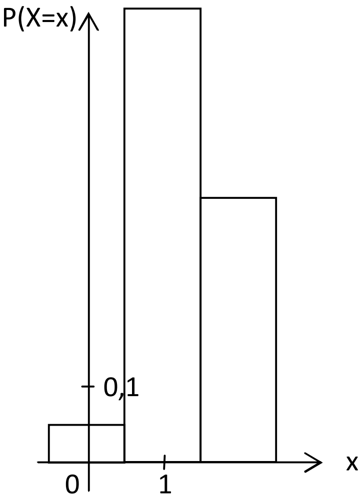


x∈	]–∞; 1[	[1;2[	[2;3[	[3;4[	[4;5[	[5;6[	[6;∞[
F(x)	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{17}{20}$	1

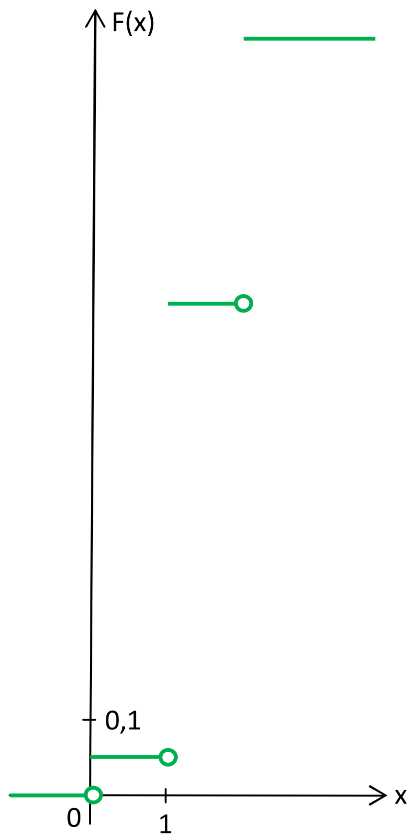


b)

x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{7}{20}$

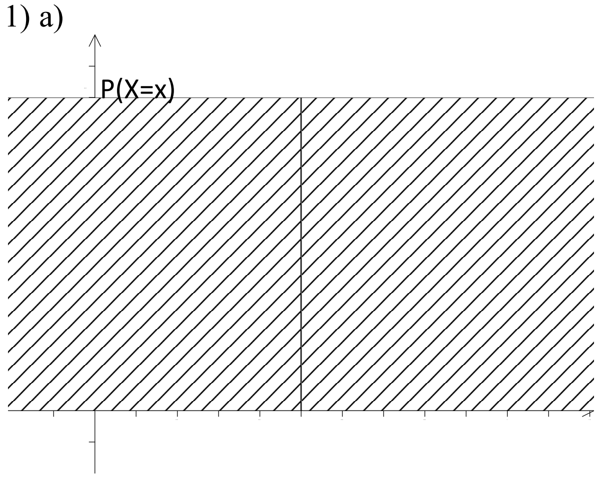


x∈	]−∞; 0[	[0;1[	[1;2[	[2;∞[
F(x)	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{13}{20}$	1

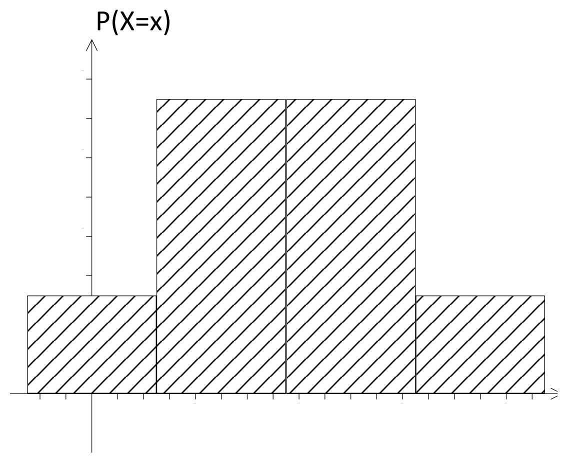


Blatt:

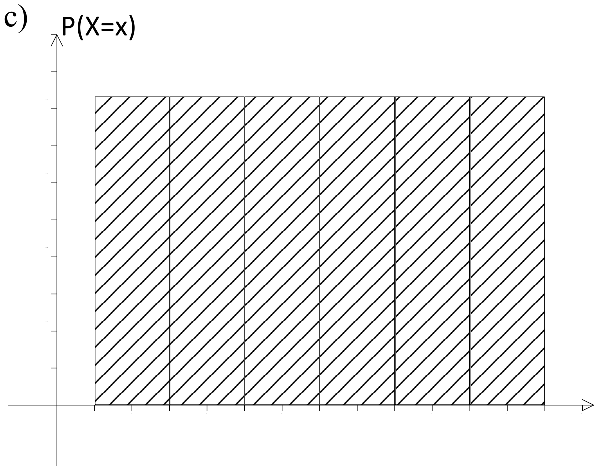
1) a)



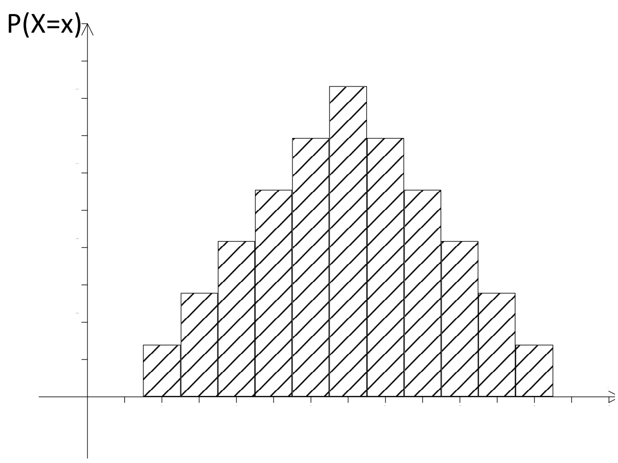
b)



c)



d)



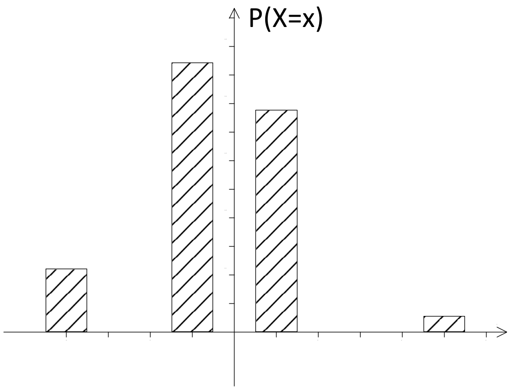
2)

x	5	1	–1	–4
P(X=x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{4}{36}$

$P(X<5) = \frac{14}{36} + \frac{17}{36} + \frac{4}{36} = \frac{35}{36} = F(4)$

bzw. $= 1 - P(X \geq 5)$

$P(-1<X \leq 5) = \frac{14}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{12} = F(5) - F(-1)$

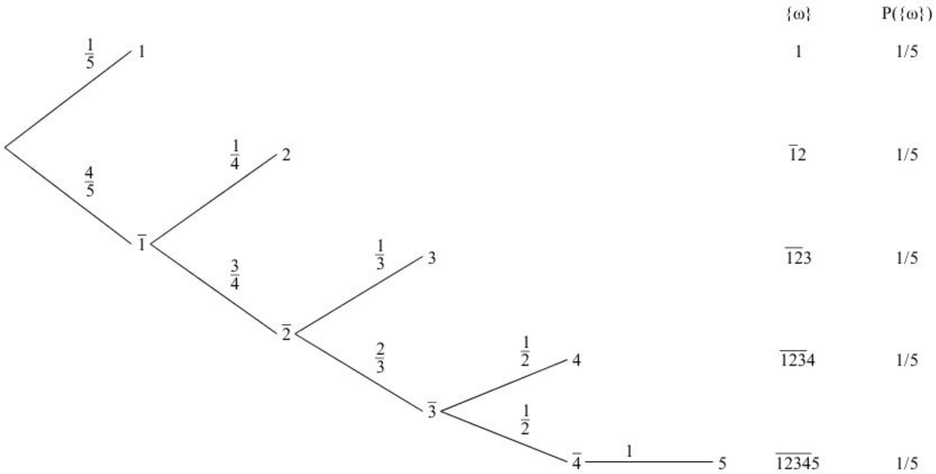


3) P(„Gewinn") = $\frac{2}{9}$; P(„Verlust") = $\frac{1}{9}$

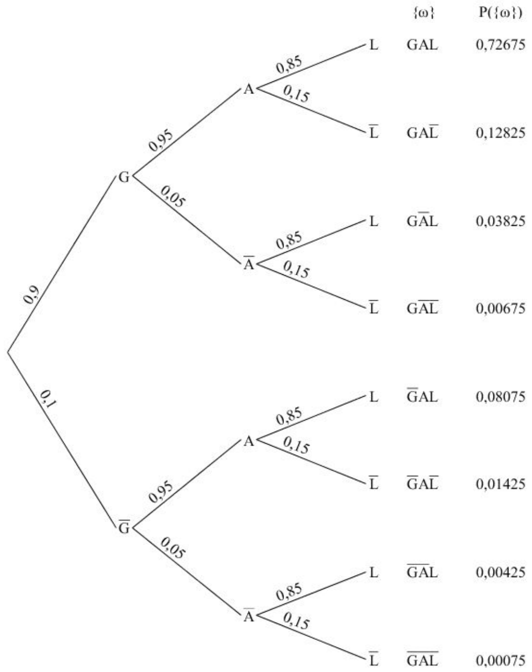
Lösungen II.3

201/27 *Baumdiagramme: nächste Seite*
I. a) ≈ 0,0700 b) ≈ 0,210 c) ≈ 0,813
II. a) ≈ 0,0571 b) ≈ 0,343 c) ≈ 0,8857

202/36 b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{3}{5}$
a)

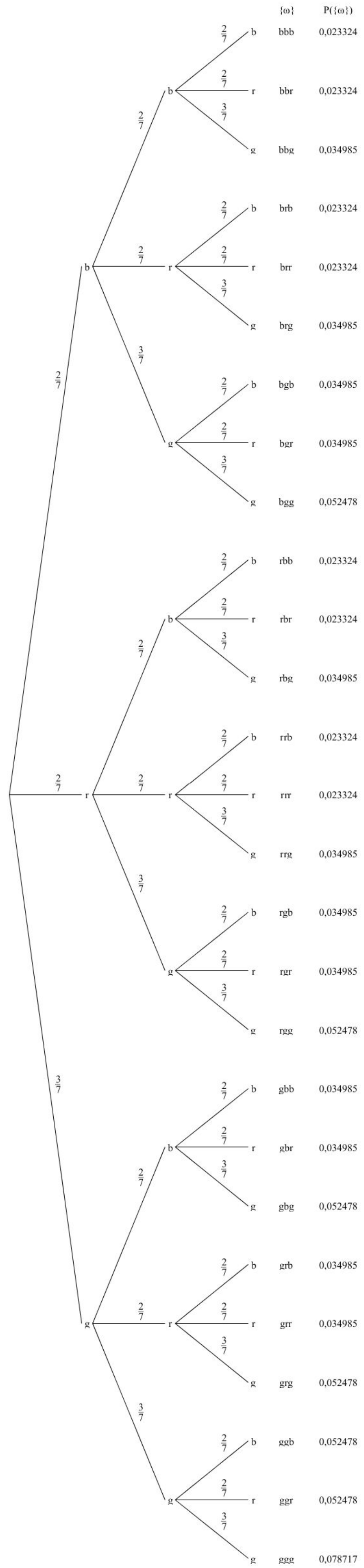


202/37 b) 0,026
a)

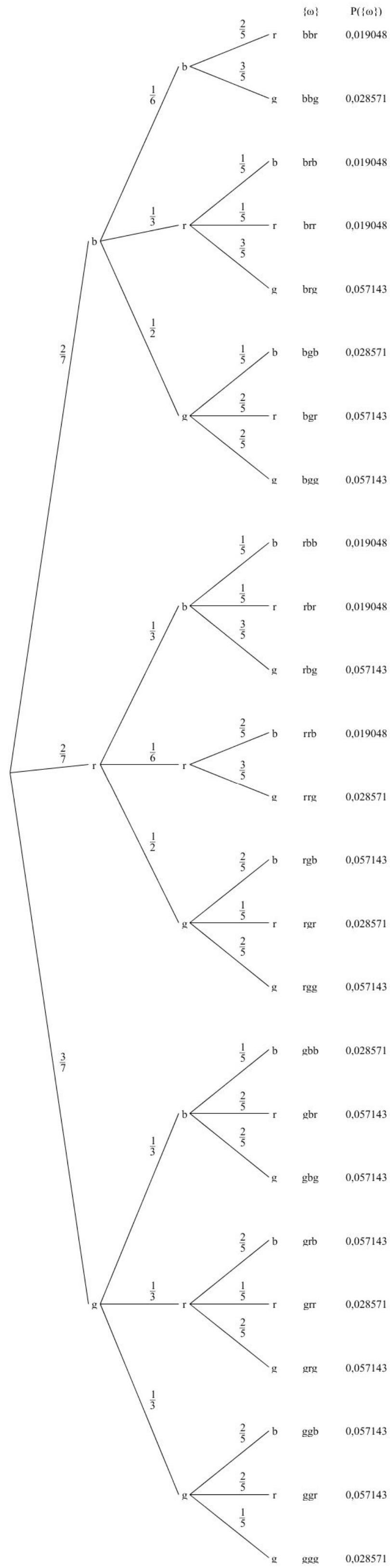


201/27

I.


{ω} P({ω})
bbb 0,023324
bbr 0,023324
bbg 0,034985
brb 0,023324
brr 0,023324
brg 0,034985
bgb 0,034985
bgr 0,034985
bgg 0,052478
rbb 0,023324
rbr 0,023324
rbg 0,034985
rrb 0,023324
rrr 0,023324
rrg 0,034985
rgb 0,034985
rgr 0,034985
rgg 0,052478
gbb 0,034985
gbr 0,034985
gbg 0,052478
grb 0,034985
grr 0,034985
grg 0,052478
ggb 0,052478
ggr 0,052478
ggg 0,078717

II.


{ω} P({ω})
bbr 0,019048
bbg 0,028571
brb 0,019048
brr 0,019048
brg 0,057143
bgb 0,028571
bgr 0,057143
bgg 0,057143
rbb 0,019048
rbr 0,019048
rbg 0,057143
rrb 0,019048
rrg 0,028571
rgb 0,057143
rgr 0,028571
rgg 0,057143
gbb 0,028571
gbr 0,057143
gbg 0,057143
grb 0,057143
grr 0,028571
grg 0,057143
ggb 0,057143
ggr 0,057143
ggg 0,028571

Lösungen II.4

a) gegebene Trefferanzahl

202/38 a) ≈ 49,3% b) ≈ 35,2% 202/39 a) ≈ 0,00124

202/40 a) ≈ $9{,}54\cdot10^{-7}$ b) ≈ 0,17620 202/41 a) ≈ 0,34315

233/21
a) ≈ 0,38742 (≈ 0,19371; ≈ 0,05740; ≈ 0,01116)
b) ≈ 0,05765 (≈ 0,13691; ≈ 0,20536; ≈ 0,21820)
c) ≈ 0,04644 (≈ 0,08293; ≈ 0,12185; ≈ 0,15014)

233/22 a) ≈ 0,37735 (≈ 0,18868; ≈ 0,05958; ≈ 0,01333; ≈ 0,00224)

233/23 Die Tabelle findet sich im TW auf Seite 12.
Wer's selber programmieren will: Formel direkt verwenden, oder Rekursionsformel aus Aufgabe 234/34 benutzen.

234/34

$$\frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{p}{q}\cdot P(X=k-1)=\frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}\cdot p^{k-1}\cdot q^{n-(k-1)}$$

$$=\frac{n!}{k\cdot(k-1)!\,(n-k+1)!/(n-k+1)}\cdot p^{k-1+1}\cdot q^{n-k+1-1}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot p^{k}\cdot q^{n-k}=\mathrm{P(X=k)}$$

Wenn man den Hinweis aus der Aufgabe verwendet, wird die Rechnung eher unübersichtlicher!

234/35 ≈ 0,11690
(Für diese Fragestellung die Rekursionsformel zu verwenden, ist reichlich sinnlos!)

b) Trefferanzahl in gegebenem Bereich

202/39 b) ≈ 0,06109 c) ≈ 0,12554 d) ≈ 0,74477

202/40 c) ≈ 0,41190 d) ≈ 0,86250 202/41 b) ≈ 0,18406 c) ≈ 0,78139

233/22 b) ≈ 0,73584 (≈ 0,92452; ≈ 0,98410; ≈ 0,99743; ≈ 0,99967)

233/26 ≈ 0,80421 233/27 ≈ 0,10181

233/28 *n = 80 steht nicht im Tafelwerk; Tabellenkalkulation verwenden!*
a) ≈ 0,98240 (≈ 0,54446) b) ≈ 0,53979 (≈ 0,01650)
c) ≈ 0,02844 (≈ 0,54446) d) ≈ 0,96480 (≈ 0,54446)

233/29 a) ≈ 0,00032 b) ≈ 0,10660 *(Tabellenkalk.!)* c) ≈ 0,00606 d) ≈ 0,00233

234/30
ja, genügt (die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 20 Wagen dort stehen, ist ≈ 0,99968)

234/31 a) ≈ 0,98750 b) ≈ 0,54912

Blatt:
122) a) 0,03676 b) 0,09588 c) < 0,000005 d) 0,68256 e) 0,95995 f) 0,32986
g) 0,28927
h) 0,93583 i) 0,88108 l) 0,86966 m) 0,96550

123) a) 0,06786 b) 0,84811 c) 0,21975 d) 0,95662 e) $2{,}5\cdot 10^{-23} \approx 0{,}00000$

125) a) 0,11241 b) 0,78578 c) 0,10181 d) 0,90874

126) a) 0,04186 b) 0,94054 c) 0,10132 d) 0,44386 e) $\approx 1{,}00000$

128) a) 0,47934 b) 0,52066 c) 0,90810

130) a) 0,3125 b) 0,8125 c) 0,5 d) 0,03125

131) a) 0,01958 b) 0,08047 c) 0,91953 d) 0,52520

c) Berechnung der Kettenlänge
202/40 e) 5 202/41 d) 3 233/25 a) 4 b) 6 c) 8 d) 9 e) 13 f) 17

Lösungen II.5

a) Bedingte Wahrscheinlichkeiten
175/5 $\frac{2}{3}$ 208/1 $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{7}{12}$ 208/2 $\frac{4}{33} \approx 12\%$

208/3 a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{4}{9}$

208/4 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{2}{9}$ 208/5 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$

208/6 a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{9}{64}$ 208/7 a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{3}{28}$

208/8 a) $\frac{1}{32}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{16}$

208/9
a) $P(\overline{W}) = \frac{5}{9}$ b) $P(W) = \frac{4}{9}$ c) $P(E) = \frac{3}{5}$ d) $P(\overline{E}) = \frac{2}{5}$ e) $P_E(\overline{W}) = \frac{5}{9}$ f) $P_{\overline{E}}(\overline{W}) = \frac{5}{9}$
g) $P_E(W) = \frac{4}{9}$ h) $P_{\overline{E}}(W) = \frac{4}{9}$ i) $P_{\overline{W}}(E) = \frac{3}{5}$ j) $P_W(E) = \frac{3}{5}$ k) $P_{\overline{W}}(\overline{E}) = \frac{2}{5}$

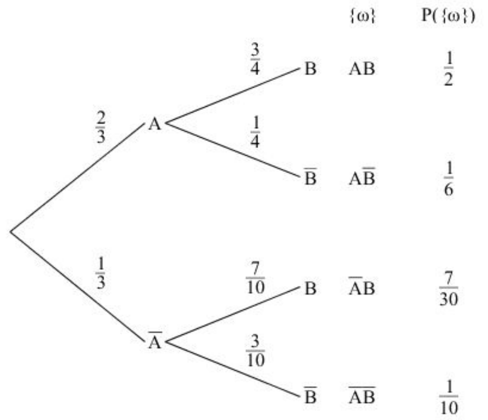
208/10 a) $\frac{15}{23} \approx 65{,}2\%$ b) $\frac{25}{97} \approx 25{,}8\%$ 209/11 a) $\approx 42{,}2\%$ b) $\approx 99{,}8\%$

209/12 $\approx 61{,}9\%$ 209/13 $\approx 51{,}3\%$

209/16
a) c) $\frac{3}{4}$

	A	$\overline{A}$	Σ
B	15	7	22
$\overline{B}$	5	3	8
Σ	20	10	1

b)



210/21 a) i) 15% ii) 5% iii) 65% c) $\frac{1}{14} \approx 7{,}1\%$

120/18
b) A, B unvereinbar ➔ $A \cap B = \{\}$ ➔ $P(A \cap B) = 0$

	A	$\overline{A}$	Σ
B	0	0,5	0,5
$\overline{B}$	0,4	0,1	0,5
Σ	0,4	0,6	1

c) $A \subset B$ ➔ $A \cap B = A$ *(sieht man z. B. mit einem Venn-Diagramm)* ➔ $P(A \cap B) = P(A)$

	A	$\overline{A}$	Σ
B	0,4	0,1	0,5
$\overline{B}$	0	0,5	0,5
Σ	0,4	0,6	1

b) Stochastische (Un-)Abhängigkeit
202/35
i.F. ist vorausgesetzt, dass das Funktionieren der Bauteile unabhängig voneinander ist!

	B_1	$\overline{B_1}$	Σ
B_2	0,9312	0,0388	0,97
$\overline{B_2}$	0,0288	0,0012	0,03
Σ	0,96	0,04	1

==> a) 6,88% b) 0,12%

208/4 e) ja 208/5 e) nein 208/6 e) nein 208/7 e) ja

209/14
A, B stochastisch unabhängig: $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$
==> $(1 - P(\overline{A}))\cdot P(B) = P(B) - P(B\setminus A)$
==> $P(B) - P(\overline{A})\cdot P(B) = P(B) - P(B\cap \overline{A})$
==> $P(\overline{A})\cdot P(B) = P(\overline{A} \cap B)$
==> $\overline{A}$, B stochastisch unabhängig
Die anderen beiden Behauptungen folgen ähnlich.

209/15

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,12	0,18	0,3
$\bar{A}$	0,28	0,42	0,7
Σ	0,4	0,6	1

209/16 d) nein 209/17 a) falsch b) falsch

209f/18
„Blond" und „blaue Augen" sowie „schwarzhaarig" und „braune Augen" sind jeweils stochastisch abhängig.

210/19 a) 0,032 b) 0,186 c) nein 210/20 unabhängig bzw. abhängig

210/21 b) nein

Blatt:
9) A = {5, 6}; B = {2, 4, 6}; C = {1, 2, 3}; D = {4, 5, 6}; E = {1, 2, 3, 4, 5}; F = {1, 2, 3, 4}
$P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{1}{2}$; $P(E) = \frac{5}{6}$; $P(F) = \frac{2}{3}$

a) $A \cap B = \{6\} \neq \{\}$ ➔ vereinbar; $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$ ➔ unabhängig

b) $C \cap D = \{\}$ ➔ unvereinbar; $P(C \cap D) = 0 \neq P(C) \cdot P(D)$ ➔ abhängig

c) $E \cap F = \{1, 2, 3, 4\} \neq \{\}$ ➔ vereinbar; $P(E \cap F) = \frac{2}{3} \neq P(E) \cdot P(F)$ ➔ abhängig

11)
a) $A \cap B = \{1, 4\}$; $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$ ➔ unabhängig

b) $P(C) = 0,5$ ➔ C muss 6 Elemente enthalten; unabhängig ➔ $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 0,25$
➔ $A \cap C$ muss 3 Elemente enthalten, d. h. A und C müssen 3 Elemente gemeinsam haben
also z. B.: C = {1, 2, 3, 7, 8 ,9} oder C = {1, 3, 5, 7, 9, 11} usw. usf.
C enthält 3 Elemente von den 6 aus A und 3 Elemente von den 6 aus $\overline{A}$
➔ es gibt $\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{3} = 400$ Möglichkeiten

c) Die Anzahl der Elemente in $D \cap E$ muss offensichtlich eine natürliche Zahl $0 \leq n \leq 12$ sein, also muss gelten:
$P(D \cap E) = \frac{n}{12}$. Andererseits ist aber $P(D) \cdot P(E) = \frac{9}{16}$. Da dies unmöglich gleich $\frac{n}{12}$ sein kann, sind D und E also abhängig.