Lösungen I.1

a) Grundbegriffe

161/1a $\Omega = \{0; 1; ...; 9\}$

Blatt/1
jeder mögliche Ausgang eines Zufallsexperiments darf im Ergebnisraum nur einmal vorkommen (eindeutige Zuordnung); hier gehört aber z. B. der Ausgang „2 gewürfelt“ sowohl zu den Elementen „2“ als auch „gerade Augenzahl“ des Ergebnisraums

21/3 $\Omega = \{AA, ABA, ABB, BB, BAB, BAA\}$
(A bzw. B steht für „Person A bzw. Person B hat Satz gewonnen“)

21/4 $\Omega = \{JJJ, JJM, JMJ, JMM, MJJ, MJM, MMJ, MMM\}$ (J steht für Junge, M für Mädchen)

21/6 *(156 Ergebnisse!)*
$\Omega = \{6, 16, 26, 36, 46, 56, 116, 126, ..., 156, 216, 226, ..., 556, 111, 112, ..., 555\}$

21/7 $\Omega = \{Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6, K1, K2, K3, K4, K5, K6\}$ (Z steht für Zahl, K für Kopf)

b) Mehrstufige Zufallsexperimente

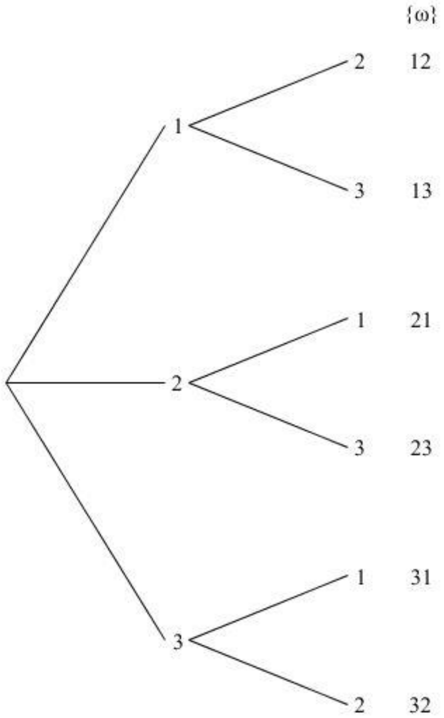
161/3, zweiter Satz
1. Aus einer Urne mit drei Kugeln, die von 1 bis 3 nummeriert sind, werden ohne Zurücklegen nacheinander zwei Kugel entnommen.
2. Eine Urne enthält zunächst eine rote, eine weiße und eine blaue Kugel. Es werden ohne Zurücklegen nacheinander zwei Kugeln entnommen. Ist die erste Kugel blau, so wird nach Entnehmen der ersten Kugel zusätzlich eine schwarze Kugel in die Urne gelegt.

Blatt/5
a) $\Omega = \{www,wws,wss\}$
b) $\Omega = \{www,wws,wsw,wss,sww,sws,ssw\}$
c) $\Omega = \{www,wws,wsw,wss,sww,sws,ssw,sss\}$

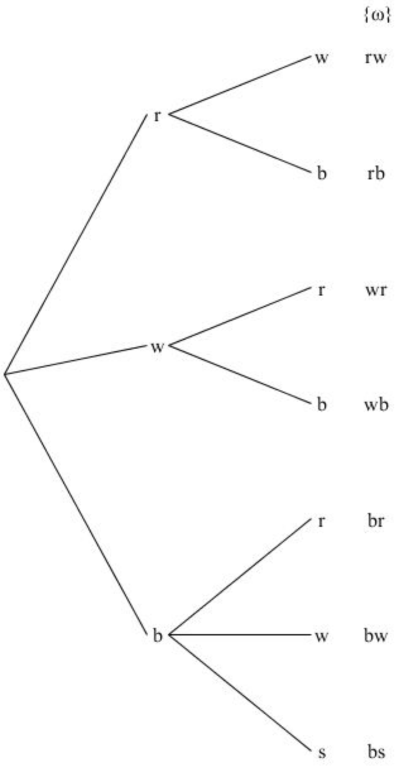
Blatt/8
a) $\Omega = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$; $|\Omega| = 10$
b) $\Omega = \{123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345\}$; $|\Omega| = 10$
eindeutige Zuordnung zwischen beiden! 2 ziehen ➔ 3 in Urne übrig bzw. umgedreht!

c) Baumdiagramme
161/3, erster Satz

1.

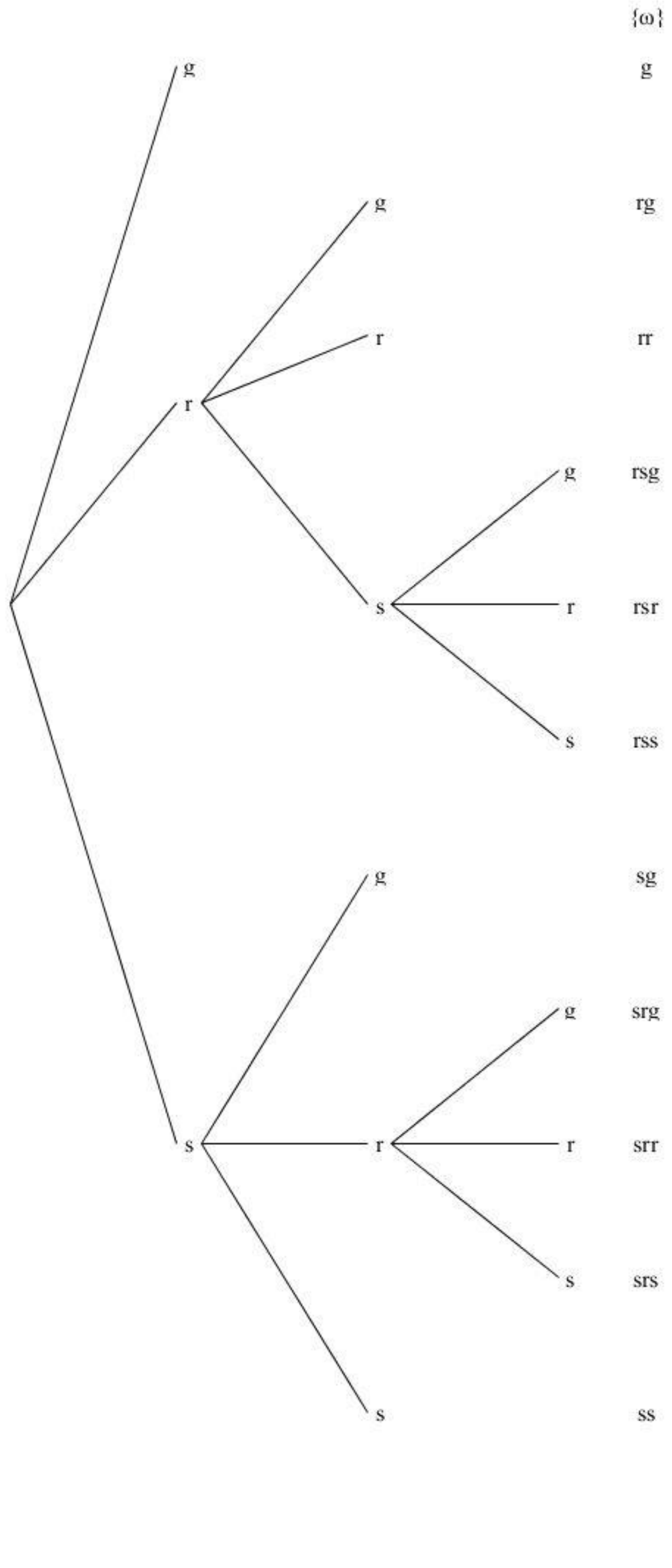


2.

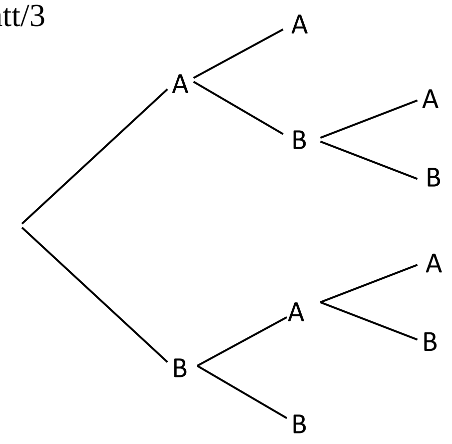


161/7

a)



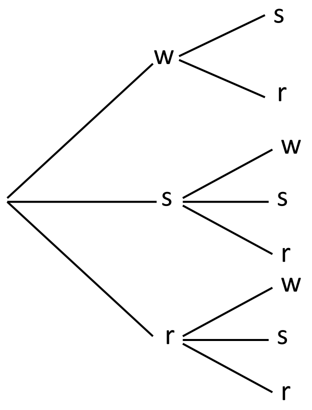
Blatt/3



Blatt/4

Blatt/9

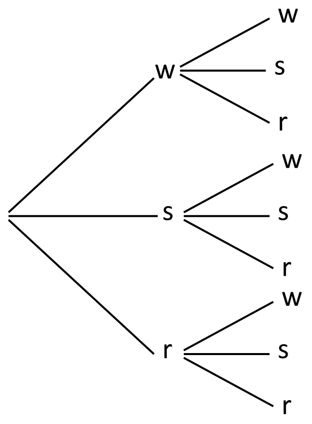
a)



Ω = {ws, wr, sw, ss, sr, rw, rs, rr}

$|\Omega| = 8$

b)

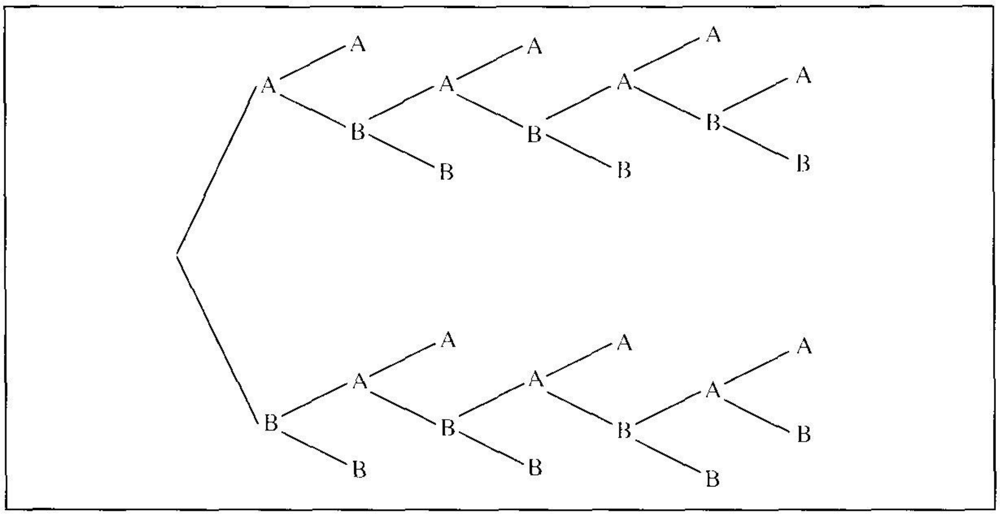


Ω = {ww, ws, wr, sw, ss, sr, rw, rs, rr}

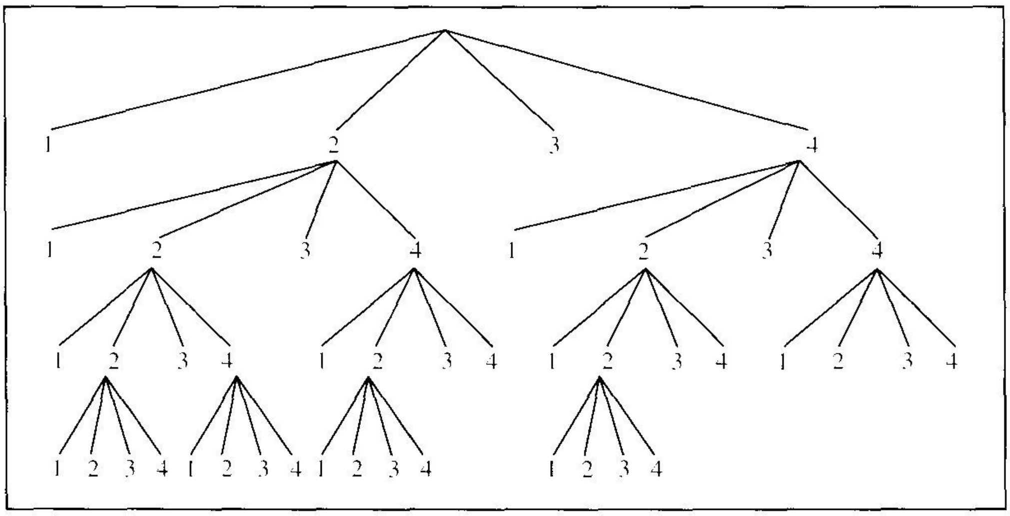
$|\Omega| = 9$

Zusatzblatt:

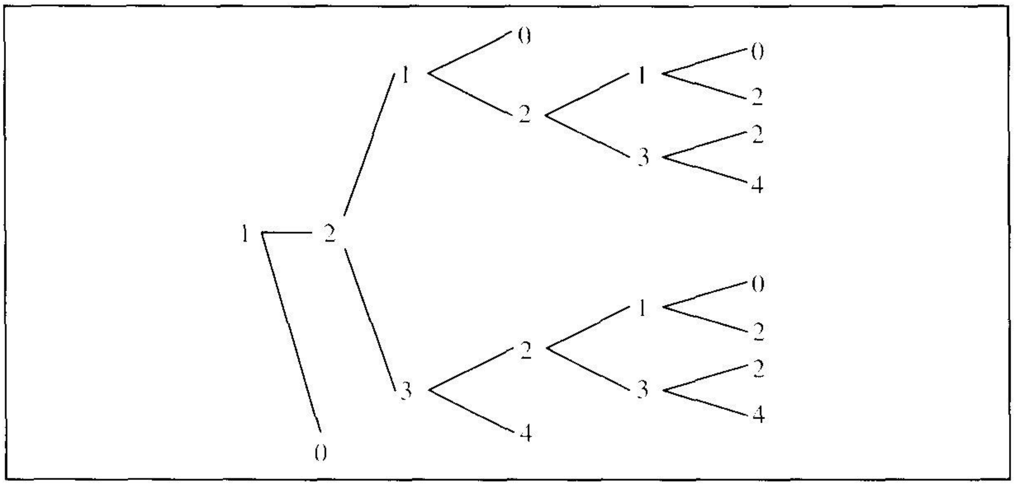
a)



b)



c)



Lösungen I.2

a) Begriffe
161/1
b) E = {2; 3; 5; 7} c) {0}, {1}, ..., {9}
d) E_1: „Zahl durch 3 teilbar und größer 0"; E_2: „gerade Zahl größer 0"; E_3: „gerade Zahl"; E_4: „Zahl kleiner 4"; E_5: z. B.: „Zahl kleiner 0" E_6: z. B. „Zahl zwischen 0 und 9"

161/2 a) E_1 = {2; 4; 6; ...; 36}; E_2 = {1; 2; 3; ...; 18}; E_3 = {0; 19; 21; 23; ... ; 35}

161/7
b) E_1 = {g; rg; sg; rsg; srg}; E_2 = {rr; rss; ss; srr}; $E_3 = E_1$; E_4 = {rr; srg; srr; srs}
c) $\overline{E_2}$: „nicht zweimal nacheinander die gleiche Farbe"; $\overline{E_2}$ = {g; rg; rsg; rsr; sg; srg; srs}
$\overline{E_3}$: „mindestens zwei Farben sind gleich"; $\overline{E_3}$ = {rr; rsr; rss; srr; srs; ss}
d) Wenn alle Farben, die fallen, verschieden sind, dann kann keine Farbe doppelt vorgekommen sein. Also hat er vorzeitig aufgehört, weil grün gekommen ist - dann ist grün die letzte Farbe. Oder er hat dreimal gespielt - dann müssen alle drei Farben vorgekommen sein (weil ja alle Farben verschieden sein sollen), und grün kann nur die letzte gewesen sein, weil man sonst ja vorher aufgehört hätte.
Sehr ähnlich argumentiert man anders herum, dass aus „die letzte Farbe, die fällt, ist grün" auch „die Farben, die fallen, sind alle verschieden" folgt.

Blatt:
3) E_1 = {61; 62; 63; 64; 65; 66}; E_2 = {11; 13; 15; 31; 33; 35; 51; 53; 55};
E_3 = {22; 24; 26; 32; 34; 36; 52; 54; 56};
E_4 = {22; 24; 26; 32; 34; 36; 52; 54; 56; 42; 62; 23; 43; 63; 25; 45; 65};
E_5 = {13; 31; 22}; E_6 = {46; 64; 55; 56; 65; 66}; E_7 = {}; E_8 = {11; 12; 21}

4) E_1 = {312; 321; 314; 341; 324; 342; 412; 421; 413; 431; 423; 432};
E_2 = {123; 132; 124; 142; 134; 143};
E_3 = {123; 132; 213; 231; 312; 321; 234; 243; 324; 342; 423; 432}; E_4 = {};
E_5 = {312; 321; 324; 342; 423; 432};
E_6 = {312; 321; 314; 341; 324; 342; 412; 421; 413; 431; 423; 432; 123; 132; 213; 231; 234; 243};
E_7 = {123; 132; 213; 231; 234; 243; 314; 341; 412; 421; 413; 431}

5) E_1 = {♥♥}; E_2 = {♥♥; ♣♣; ♠♠; ♦♦}; E_3 = {♥♠, ♠♥};
E_4: „1. Karte ♥"; E_5: „entweder 1. oder 2. Karte ♥" bzw. „genau einmal ♥";
E_6: „1. Karte rot, 2. schwarz"; E_7: „beide rot"

6) E_1 = {ABC; ABD; ABE; ACD; ACE; ADE}; E_2 = {ACE};
E_3 = {ABC; ABE; BCE; ACD; ADE; CDE}; E_4 = {ABC; ABE; BCE; ACD; ADE; CDE; ACE};
E_5 = {ABD; BCD; BDE; ACE} laut Lösungsbuch;
eigentlich aber auch noch {ADE; CDE; ACD}!?!

7) E_1 = {rrrr; wrrr; rrwr; rrrw; wrwr; wrrw; rrww; wrww}; E_2 = {wrww};
E_3 = {rrww; rwrw; wrrw; rwwr; wrwr; wwrr; rrrw; rrwr; rwrr; wrrr; rrrr}
= $\overline{\{wwww; rwww; wrww; wwrw; wwwr\}}$; E_4 = $\overline{\{wwww\}}$;
E_5 = {wwww; rwww; wrww; wwrw; wwwr}; E_6 = {rrww; rrrw; rrwr; wwrr; wrrr; rwrr};
E_7 = {rrww; rrrw; rrwr; wwrr; wrrr; rwrr; rrrr}; E_8 = {rrrr};
E_9: „1. und 3. Kugel rot“; E_{10}: „mindestens eine weiße“; E_{11}: „nur die letzte weiß“;
E_{12}: „die ersten drei rot“; E_{13}: „mindestens 3 rote“

8) E_1 = {123; 134; 135; 136; 324; 235; 236; 345; 346; 356}; E_2 = {126; 136; 146; 156};
E_3 = {123; 124; 125; 134; 135; 145; 236; 246; 256; 346; 356; 456};
E_4 = {124; 134; 135; 136; 145; 146; 156; 234; 245; 246; 345; 346; 356; 456};
E_5 = {123; 124; 126; 134; 135; 136; 145; 146; 156; 234; 236; 246; 345; 346; 356; 456}

<u>b) Zufallsgrößen</u>
Übungsblatt:
1) {16; 25; 34; 43; 52; 61} bzw. {26; 34; 43; 62}

2) a) {4} b) {1, 2} c) {2, 3, 4, 5} d) {6} e) {} f) Ω

ω	1	2	3	4	5	6
x = X(ω)	1	4	9	16	25	36

3) b) {Anfang, schwer} bzw. {Aller, Anfang} bzw. {ist}
a)

ω	Aller	Anfang	ist	schwer
X(ω)	5	6	3	6
Y(ω)	2	2	1	1
Z(ω)	3	4	2	5

4) {ZZZZZ} bzw. {KKKKZ, ZKKKK} bzw. {KKKKZ, ZKKKK, KKKKK}

5) b) {ABC, ACB} bzw. {BAC, CAB} bzw. {BCA, CBA} bzw. Ω
a)

ω	ABC	ACB	BAC	CAB	BCA	CBA
X(ω)	2	2	1	1	–3	–3

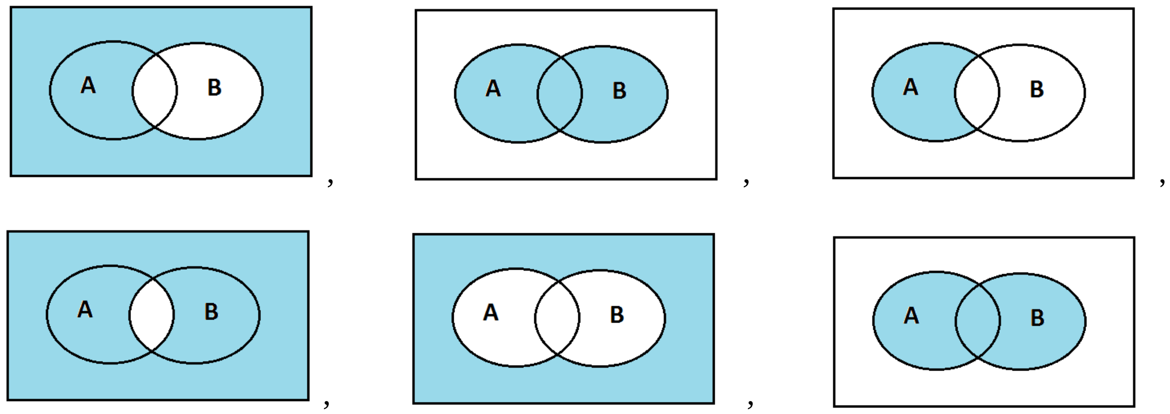
6) a) {15; 51} b) {} c) {13, 31}

<u>c) Ereignisalgebra</u>
161/2
b) $E_1 \cup E_2$ = {1; 2; 3; ...; 17; 18; 20; 22; 24; ... ; 36}
$E_1 \cap E_2$ = {2; 4; 6; ...; 16; 18}
$E_1 \cap E_3$ = {}

161/4 a,b,f sind falsch; c,d,e sind richtig

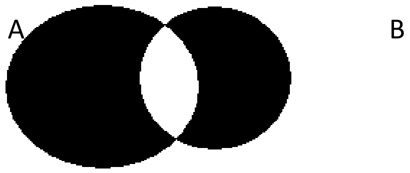
161/5 z. B.: $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)}$; $\overline{D}$; $\overline{E} \cup F$; $(G \cap \overline{H}) \cup (\overline{G} \cap H)$

161/6



161/7 e) $E_2 \cap E_4 = \{rr; srr\} \neq \{\}$ ==> vereinbar

Blatt:
1) a) {1,3,5,6}, {1,3,4,5}, {2}, {6}, {4}, {1,3,5}, {2,4,6}, {1,2,3,5,6}, {1,2,3,4,5}, {1,3,4,5,6}
b) entweder A oder B tritt ein, d. h. genau eines der beiden Ereignisse tritt ein



4) a) $A \cap B$ b) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ c) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ d) $A \cup B$
e) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ = ...

6) $B_0 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$; $B_1 = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$; $B_2 = A_1 \cap A_2$; $C = A_1 \cup A_2$

Zusatzaufgabe:
fehlt noch!

Lösungen I.3

a) Das allgemeine Zählprinzip
199/1 1680 199/3 a) 125 b) 25 c) 5 d) 1 e) s.u. bei Kombinationen

200/19 6840 201/30 12

Blatt:
15) a) 60 b) 12 c) 36 16) a) 125 b) 25 c) 75

22) a) 3024 b) 360 c) 1260 d) 1008 e) 1344 f) 126 g) 144
25) a) 24 b) 12 c) 8 d) 4

37) a) 32 b) 8 c) 16 d) 8 e) 1

b,c,d) Permutationen, Variationen, Kombinationen

199/2 a) 5 405 400 b) 75 600 c) 831 600 d) 18 900 e) 25 200 f) 277 200

199/3 e) 6

199/4

Betrachte eine Teilmenge E. Bei jedem der n Elemente von Ω gibt es jeweils 2 Möglichkeiten: Es kann in E enthalten sein oder nicht. Also gibt es 2^n verschiedene Möglichkeiten, wie E aussehen kann.

199/5 $2^n = (1 + 1)^n = \ldots$ binomischer Lehrsatz ==> Behauptung
oder sich überlegen, welche Teilmengen vorkommen können, und 199/4 verwenden!

199/6 a) simples Ausrechnen b) man schreibe sich beide Seiten ausführlich hin...
c) beide Brüche der rechten Seiten ausführlich hinschreiben
$k! = (k+1)!/(k+1)\cdot$ und $(n-(k+1))! = (n-k-1)! = (n-k)!/(n-k)$ verwenden,
Doppelbrüche vereinfachen
die beiden Brüche haben nun denselben Nenner ==> addieren!
$(n+1)\cdot n! = (n+1)!$ und $(n-k)! = ((n+1)-(k+1))!$ verwenden
==> Behauptung
d) folgt aus (c), wenn man k+1 durch k ersetzt, also k durch k−1

199/8 a) $2{,}43\cdot 10^{18}$ b) $1{,}32\cdot 10^{13}$ c) $1{,}05\cdot 10^{10}$ bzw. $2{,}51\cdot 10^{11}$ *(Aufgabenstellung unklar)*

199/9 306 200/10 66

200/11 3000 200/14 126

200/13

Gemeint ist wohl: wie viele Tippreihen muss man gleichzeitig ausfüllen, um mit Sicherheit zu gewinnen, mit anderen Worten: Wie viele Tippreihen sind möglich? Antwort: 177 147

200/15 120 *(nicht* $3 \cdot \binom{8}{4}$ *rechnen, sonst zählt man einige Möglichkeiten doppelt!)*

200/16 34 650 200/20 25 225 200

200/17 a) 479 001 600 b) 518 400 c) 3 628 800

200/18 32 200/25 121

201/31 a) 60480 b) 40320 *Reihenfolge wichtig! („Serie")*

202/32 a) $9{,}67\cdot 10^{13}$; 0,0967 s b) $4{,}03\cdot 10^{26}$; 12,8 ka

202/33 a) 40 320 b) 24 c) 6

Blatt:

12) Münze: $|\Omega| = 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2$ *(n mal)* $= 2^n$; Würfel: $|\Omega| = 6^n$ 36) mind. 6

13) 6; 24 35) a) 4096 b) 1024 c) 2048 d) 1024 e) 512

Lösungen I.4

a) Häufigkeiten

Blatt:

63) a) $\frac{3}{7} \approx 42{,}86\%$ b) $\frac{19}{70} \approx 27{,}14\%$ c) $\frac{11}{70} \approx 15{,}71\%$ 64) a) 12,5% b) 23% c) 20,5%

65) a) 14,5% b) 16,5% c) 50,5% d) 48% e) 81,5%

176/12

a) 50 haben sowohl A als auch B gekauft:

	A	$\overline{A}$	Σ
B	50	150	200
$\overline{B}$	200	100	300
Σ	250	250	500

b) 50% bzw. 40% c) 20%

176/14 $\frac{520}{570} \approx 91\%$ der Mädchen konnten die Aufgabe lösen

	J	M	Σ
A	180	520	700
$\overline{A}$	250	50	300
Σ	430	570	1000

Satz von Sylvester (für absolute Häufigkeiten):

$H_{1000}(J \cup A) = 180 + 520 + 250 = 950$

$= H_{1000}(J) + H_{1000}(A) - H_{1000}(J \cap A) = 430 + 700 - 180 = 950$

176/15 $\frac{2}{5}$ der Teilnehmer sollten dem Kabinenbahnbetreiber gemeldet werden:

	W	$\overline{W}$	Σ
K	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\overline{K}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
Σ	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1