

Lösungen I.1

a) Grundbegriffe

$$161/1a \quad \Omega = \{0; 1; \dots; 9\}$$

Blatt/1

jeder mögliche Ausgang eines Zufallsexperiments darf im Ergebnisraum nur einmal vorkommen (eindeutige Zuordnung); hier gehört aber z. B. der Ausgang „2 gewürfelt“ sowohl zu den Elementen „2“ als auch „gerade Augenzahl“ des Ergebnisraums

$$21/3 \quad \Omega = \{AA, ABA, ABB, BB, BAB, BAA\}$$

(A bzw. B steht für „Person A bzw. Person B hat Satz gewonnen“)

$$21/4 \quad \Omega = \{JJJ, JJM, JMJ, JMM, MJJ, MJM, MMJ, MMM\} \quad (\text{J steht für Junge, M für Mädchen})$$

$$21/6 \quad (156 \text{ Ergebnisse!})$$
$$\Omega = \{6, 16, 26, 36, 46, 56, 116, 126, \dots, 156, 216, 226, \dots, 556, 111, 112, \dots, 555\}$$

$$21/7 \quad \Omega = \{Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6, K1, K2, K3, K4, K5, K6\} \quad (\text{Z steht für Zahl, K für Kopf})$$

b) Mehrstufige Zufallsexperimente

161/3, zweiter Satz

1. Aus einer Urne mit drei Kugeln, die von 1 bis 3 nummeriert sind, werden ohne Zurücklegen nacheinander zwei Kugeln entnommen.
2. Eine Urne enthält zunächst eine rote, eine weiße und eine blaue Kugel. Es werden ohne Zurücklegen nacheinander zwei Kugeln entnommen. Ist die erste Kugel blau, so wird nach Entnehmen der ersten Kugel zusätzlich eine schwarze Kugel in die Urne gelegt.

Blatt/5

$$a) \quad \Omega = \{www, wws, wss\}$$

$$b) \quad \Omega = \{www, wws, wsw, wss, sww, sws, ssw\}$$

$$c) \quad \Omega = \{www, wws, wsw, wss, sww, sws, ssw, sss\}$$

Blatt/8

$$a) \quad \Omega = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}; |\Omega| = 10$$

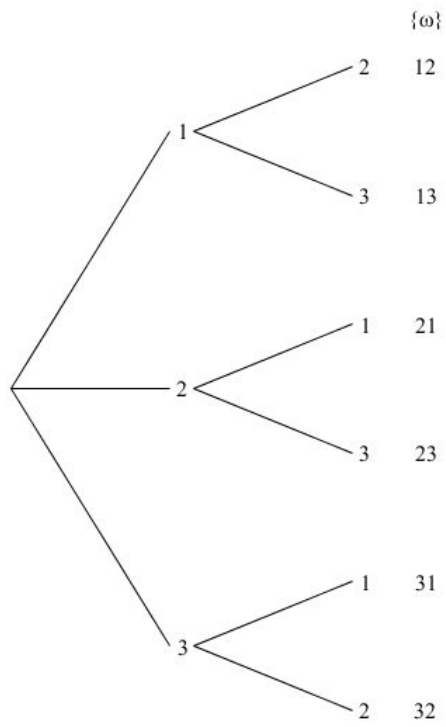
$$b) \quad \Omega = \{123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345\}; |\Omega| = 10$$

eindeutige Zuordnung zwischen beiden! 2 ziehen \rightarrow 3 in Urne übrig bzw. umgedreht!

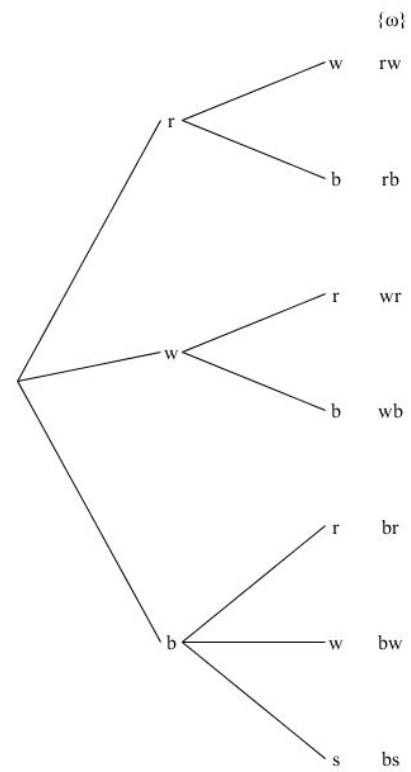
c) Baumdiagramme

161/3, erster Satz

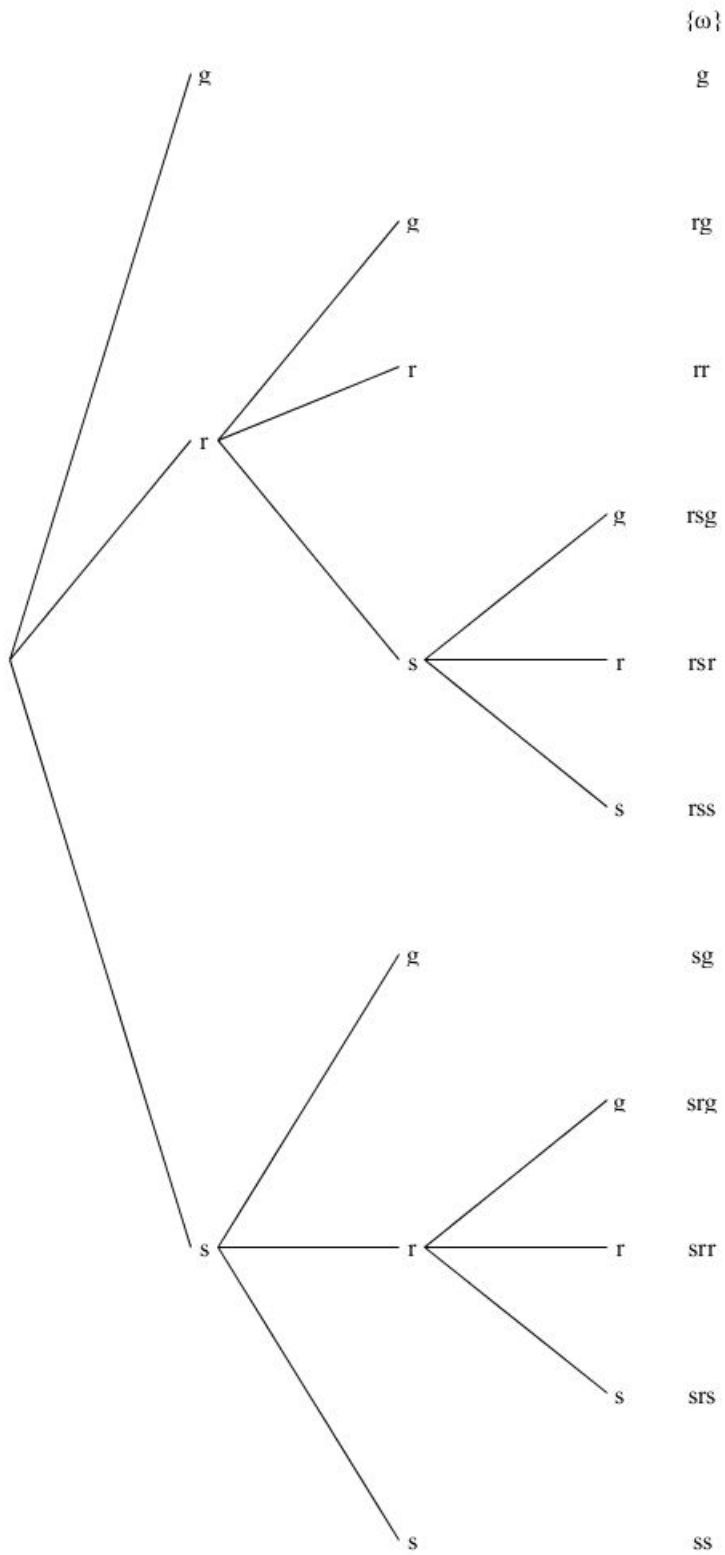
1.



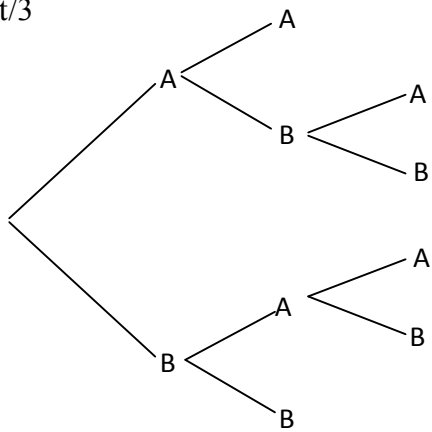
2.



161/7
a)



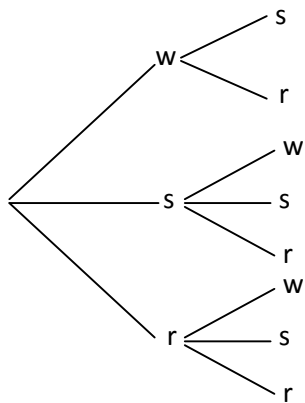
Blatt/3



Blatt/4

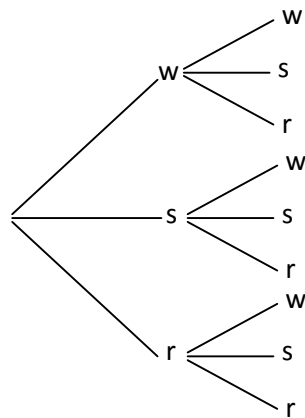
Blatt/9

a)



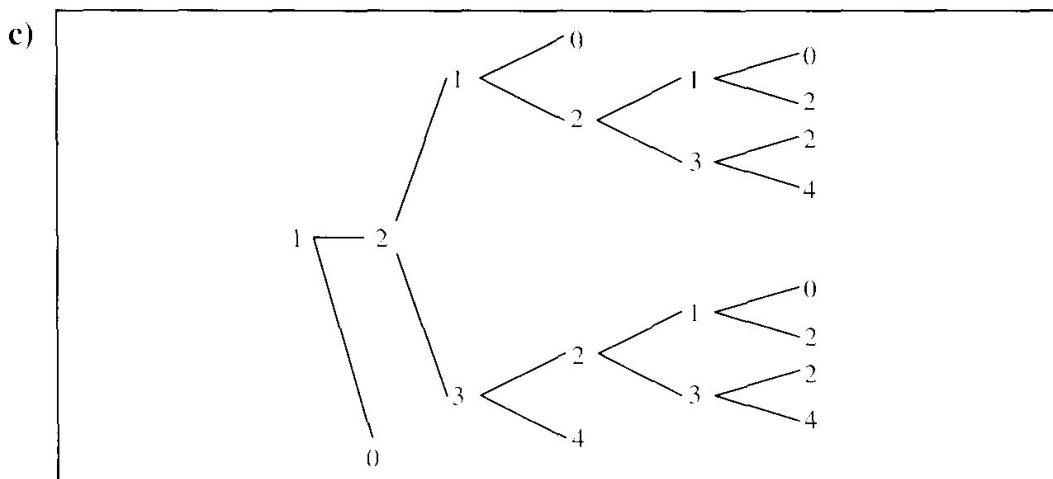
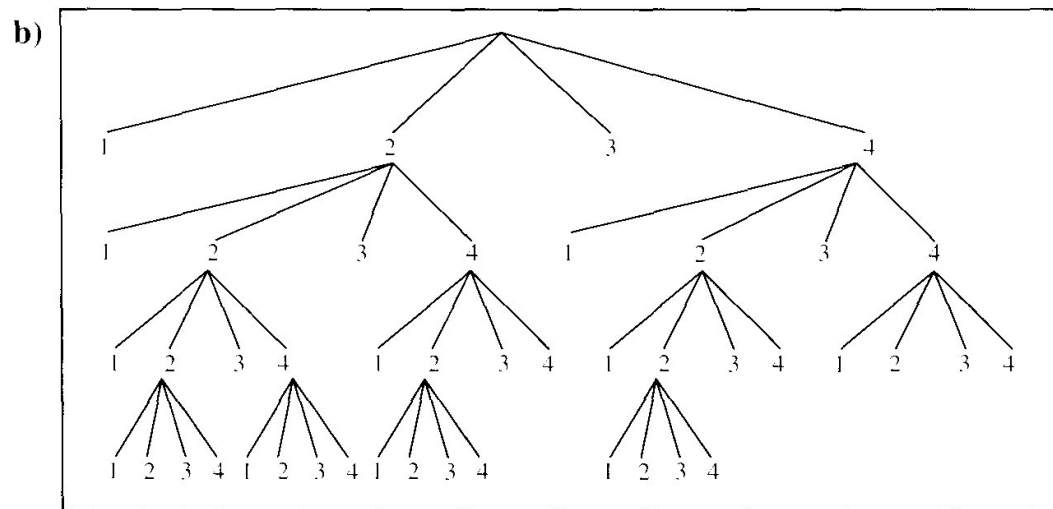
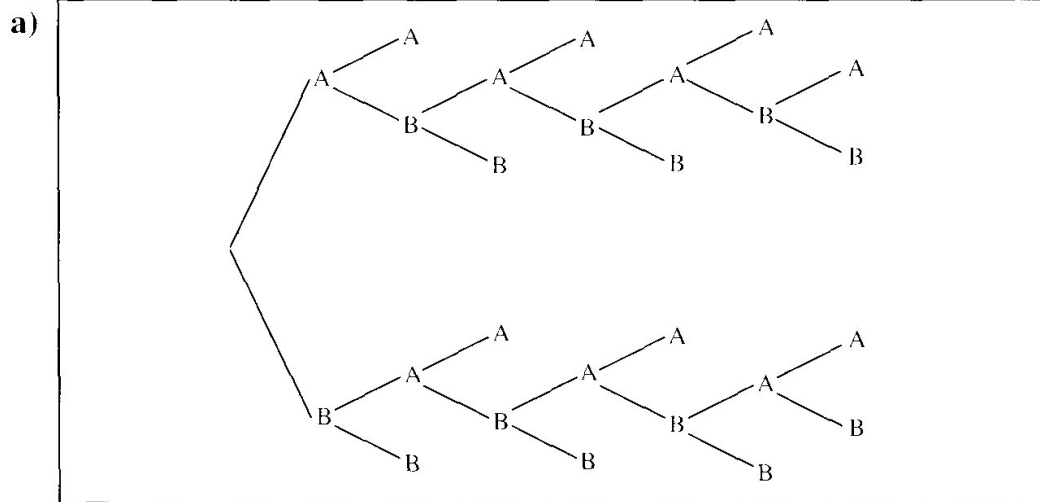
$$\Omega = \{ws, wr, sw, ss, sr, rw, rs, rr\}$$
$$|\Omega| = 8$$

b)



$$\Omega = \{ww, ws, wr, sw, ss, sr, rw, rs, rr\}$$
$$|\Omega| = 9$$

Zusatzblatt:



Lösungen I.2

a) Begriffe

161/1

b) $E = \{2; 3; 5; 7\}$

c) $\{0\}, \{1\}, \dots, \{9\}$

d) E_1 : „Zahl durch 3 teilbar und größer 0“; E_2 : „gerade Zahl größer 0“; E_3 : „gerade Zahl“;
 E_4 : „Zahl kleiner 4“; E_5 : z. B.: „Zahl kleiner 0“ E_6 : z. B. „Zahl zwischen 0 und 9“

161/2 a) $E_1 = \{2; 4; 6; \dots; 36\}$; $E_2 = \{1; 2; 3; \dots; 18\}$; $E_3 = \{0; 19; 21; 23; \dots; 35\}$

161/7

b) $\overline{E}_1 = \{g; rg; sg; rsg; srg\}$; $E_2 = \{rr; rss; ss; srr\}$; $E_3 = E_1$; $E_4 = \{rr; srg; srr; srs\}$

c) \overline{E}_2 : „nicht zweimal nacheinander die gleiche Farbe“; $\overline{E}_2 = \{g; rg; rsg; rsr; sg; srg; srs\}$

\overline{E}_3 : „mindestens zwei Farben sind gleich“; $\overline{E}_3 = \{rr; rsr; rss; srr; srs; ss\}$

d) Wenn alle Farben, die fallen, verschieden sind, dann kann keine Farbe doppelt vorgekommen sein. Also hat er vorzeitig aufgehört, weil grün gekommen ist - dann ist grün die letzte Farbe. Oder er hat dreimal gespielt - dann müssen alle drei Farben vorgekommen sein (weil ja alle Farben verschieden sein sollen), und grün kann nur die letzte gewesen sein, weil man sonst ja vorher aufgehört hätte.

Sehr ähnlich argumentiert man anders herum, dass aus „die letzte Farbe, die fällt, ist grün“ auch „die Farben, die fallen, sind alle verschieden“ folgt.

Blatt:

3) $E_1 = \{61; 62; 63; 64; 65; 66\}$; $E_2 = \{11; 13; 15; 31; 33; 35; 51; 53; 55\}$;

$E_3 = \{22; 24; 26; 32; 34; 36; 52; 54; 56\}$;

$E_4 = \{22; 24; 26; 32; 34; 36; 52; 54; 56; 42; 62; 23; 43; 63; 25; 45; 65\}$;

$E_5 = \{13; 31; 22\}$; $E_6 = \{46; 64; 55; 56; 65; 66\}$; $E_7 = \{\}$; $E_8 = \{11; 12; 21\}$

4) $E_1 = \{312; 321; 314; 341; 324; 342; 412; 421; 413; 431; 423; 432\}$;

$E_2 = \{123; 132; 124; 142; 134; 143\}$;

$E_3 = \{123; 132; 213; 231; 312; 321; 234; 243; 324; 342; 423; 432\}$; $E_4 = \{\}$;

$E_5 = \{312; 321; 324; 342; 423; 432\}$;

$E_6 = \{312; 321; 314; 341; 324; 342; 412; 421; 413; 431; 423; 432; 123; 132; 213; 231; 234; 243\}$;

$E_7 = \{123; 132; 213; 231; 234; 243; 314; 341; 412; 421; 413; 431\}$

5) $E_1 = \{\heartsuit\heartsuit\}$; $E_2 = \{\heartsuit\clubsuit; \clubsuit\clubsuit; \heartsuit\spadesuit; \spadesuit\spadesuit\}$; $E_3 = \{\heartsuit\spadesuit, \spadesuit\heartsuit\}$;

E_4 : „1. Karte \heartsuit “; E_5 : „entweder 1. oder 2. Karte \heartsuit “ bzw. „genau einmal \heartsuit “;

E_6 : „1. Karte rot, 2. schwarz“; E_7 : „beide rot“

6) $E_1 = \{ABC; ABD; ABE; ACD; ACE; ADE\}$; $E_2 = \{ACE\}$;

$E_3 = \{ABC; ABE; BCE; ACD; ADE; CDE\}$; $E_4 = \{ABC; ABE; BCE; ACD; ADE; CDE; ACE\}$;

$E_5 = \{ABD; BCD; BDE; ACE\}$ laut Lösungsbuch; eigentlich aber auch noch $\{ADE; CDE\}$!?!

7) $E_1 = \{rrrr; wrrr; rrwr; rrrw; wrwr; wrrw; rrww; wrww\}$; $E_2 = \{wrww\}$;

$E_3 = \{rrww; rrrw; wrrw; rwwr; wrwr; wwrr; rrrw; rrwr; rwrw; wrrr; rrrr\}$

$= \{\overline{wwww}; \overline{rwww}; \overline{wrww}; \overline{wwrw}; \overline{wwwr}\}$; $E_4 = \{\overline{wwww}\}$;

$E_5 = \{\overline{wwww}; \overline{rwww}; \overline{wrww}; \overline{wwrw}; \overline{wwwr}\}$; $E_6 = \{rrww; rrrw; rrwr; wwrr; wrrr; rwrw\}$;

$E_7 = \{rrww; rrrw; rrwr; wwrr; wrrr; rwrr; rrrr\}; \quad E_8 = \{rrrr\};$
 $E_9: \text{„1. und 3. Kugel rot“}; \quad E_{10}: \text{„mindestens eine wei\ss e“}; \quad E_{11}: \text{„nur die letzte wei\ss e“};$
 $E_{12}: \text{„die ersten drei rot“}; \quad E_{13}: \text{„mindestens 3 rote“}$

8) $E_1 = \{123; 134; 135; 136; 324; 235; 236; 345; 346; 356\}; \quad E_2 = \{126; 136; 146; 156\};$
 $E_3 = \{123; 124; 125; 134; 135; 145; 236; 246; 256; 346; 356; 456\};$
 $E_4 = \{124; 134; 135; 136; 145; 146; 156; 234; 245; 246; 345; 346; 356; 456\};$
 $E_5 = \{123; 124; 126; 134; 135; 136; 145; 146; 156; 234; 236; 246; 345; 346; 356; 456\}$

b) Zufallsgrößen

Übungsblatt:

1) $\{16; 25; 34; 43; 52; 61\}$ bzw. $\{26; 34; 43; 62\}$

2) a) $\{4\}$ b) $\{1, 2\}$ c) $\{2, 3, 4, 5\}$ d) $\{6\}$ e) $\{\}$ f) Ω

ω	1	2	3	4	5	6
$x = X(\omega)$	1	4	9	16	25	36

3) b) $\{\text{Anfang, schwer}\}$ bzw. $\{\text{Aller, Anfang}\}$ bzw. $\{\text{ist}\}$

a)

ω	Aller	Anfang	ist	schwer
$X(\omega)$	5	6	3	6
$Y(\omega)$	2	2	1	1
$Z(\omega)$	3	4	2	5

4) $\{\text{ZZZZZ}\}$ bzw. $\{\text{KKKKZ, ZKKKK}\}$ bzw. $\{\text{KKKKZ, ZKKKK, KKKKK}\}$

5) b) $\{\text{ABC, ACB}\}$ bzw. $\{\text{BAC, CAB}\}$ bzw. $\{\text{BCA, CBA}\}$ bzw. Ω

a)

ω	ABC	ACB	BAC	CAB	BCA	CBA
$X(\omega)$	2	2	1	1	-3	-3

6) a) $\{15; 51\}$ b) $\{\}$ c) $\{13, 31\}$

c) Ereignisalgebra

161/2

b) $E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; \dots; 17; 18; 20; 22; 24; \dots; 36\}$

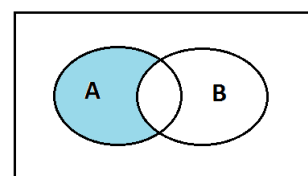
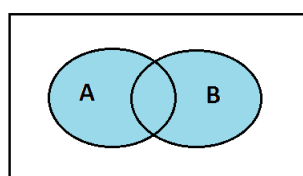
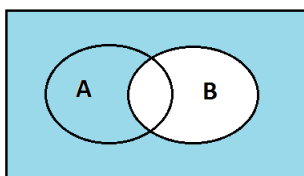
$E_1 \cap E_2 = \{2; 4; 6; \dots; 16; 18\}$

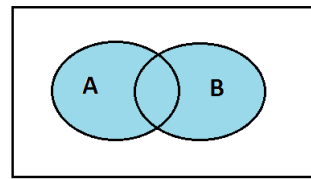
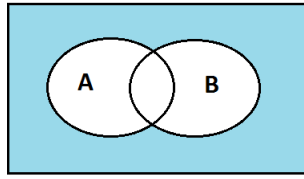
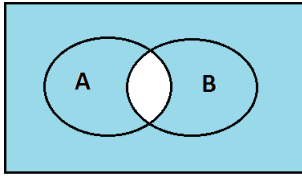
$E_1 \cap E_3 = \{\}$

161/4 a,b,f sind falsch; c,d,e sind richtig

161/5 z. B.: $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)}$; \bar{D} ; $\bar{E} \cup F$; $(G \cap \bar{H}) \cup (\bar{G} \cap H)$

161/6





161/7 e) $E_2 \cap E_4 = \{rr; srr\} \neq \{\}$ \implies vereinbar

Blatt:

1) a) $\{1,3,5,6\}, \{1,3,4,5\}, \{2\}, \{6\}, \{4\}, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,3,4,5,6\}$

b) entweder A oder B tritt ein, d. h. genau eines der beiden Ereignisse tritt ein



4) a) $A \cap B$ b) $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$ c) $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$ d) $A \cup B$

e) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \dots$

6) $B_0 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}; \quad B_1 = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2); \quad B_2 = A_1 \cap A_2; \quad C = A_1 \cup A_2$

Zusatzaufgabe:

fehlt noch!

Lösungen I.3

a) Das allgemeine Zählprinzip

199/1 1680 199/3 a) 125 b) 25 c) 5 d) 1 e) s.u. bei Kombinationen

200/19 6840 202/30 12

Blatt:

12) Münze: $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$ (n mal) $= 2^n$; Würfel: $|\Omega| = 6^n$

15) a) 60 b) 12 c) 36 16) a) 125 b) 25 c) 75

22) a) 3024 b) 360 c) 1260 d) 1008 e) 1344 f) 126 g) 144

25) a) 24 b) 12 c) 8 d) 4

35) a) 4096 b) 1024 c) 2048 d) 1024 e) 512

36) mind. 6

37) a) 32 b) 8 c) 16 d) 8 e) 1

b,c,d) Permutationen, Variationen, Kombinationen

199/2 a) 5 405 400 b) 75 600 c) 831 600 d) 18 900 e) 25 200 f) 277 200

199/3 e) 6

199/4

Betrachte eine Teilmenge E. Bei jedem der n Elemente von Ω gibt es jeweils 2 Möglichkeiten: Es kann in E enthalten sein oder nicht. Also gibt es 2^n verschiedene Möglichkeiten, wie E aussehen kann.

199/5 $2^n = (1 + 1)^n = \dots$ binomischer Lehrsatz \implies Behauptung
oder sich überlegen, welche Teilmengen vorkommen können, und 199/4 verwenden!

199/6 a) simples Ausrechnen b) man schreibe sich beide Seiten ausführlich hin...

c) beide Brüche der rechten Seiten ausführlich hinschreiben

$k! = (k+1)!/(k+1)$ und $(n-(k+1))! = (n-k-1)! = (n-k)!/(n-k)$ verwenden,

Doppelbrüche vereinfachen

die beiden Brüche haben nun denselben Nenner \implies addieren!

$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ und $(n-k)! = ((n+1)-(k+1))!$ verwenden

\implies Behauptung

d) folgt aus (c), wenn man $k+1$ durch k ersetzt, also k durch $k-1$

199/8 a) $2,43 \cdot 10^{18}$ b) $1,32 \cdot 10^{13}$ c) $1,05 \cdot 10^{10}$ bzw. $2,51 \cdot 10^{11}$ (Aufgabenstellung unklar)

199/9 306 200/10 66

200/11 3000 200/14 126

200/13

Gemeint ist wohl: wie viele Tippreihen muss man gleichzeitig ausfüllen, um mit Sicherheit zu gewinnen, mit anderen Worten: Wie viele Tippreihen sind möglich? Antwort: 177 147

200/15 120 (nicht $3 \cdot \binom{8}{4}$ rechnen, sonst zählt man einige Möglichkeiten doppelt!)

200/16 34 650 200/20 25 225 200

200/17 a) 479 001 600 b) 518 400 c) 3 628 800

200/18 32 200/25 121

201/31 a) 60480 b) 40320 Reihenfolge wichtig! („Serie“)

202/32 a) $9,67 \cdot 10^{13}$; 0,0967 s b) $4,03 \cdot 10^{26}$; 12,8 ka

202/33 a) 40 320 b) 24 c) 6

Lösungen I.4

a) Häufigkeiten

Blatt:

63) a) $\frac{3}{7} \approx 42,86\%$ b) $\frac{19}{70} \approx 27,14\%$ c) $\frac{11}{70} \approx 15,71\%$

64) a) 12,5% b) 23%

c) 20,5%

65) a) 14,5% b) 16,5% c) 50,5% d) 48% e) 81,5%