Lösungen III.1

144/1 *jeweils $C \in \mathbb{R}$*

a) $y = 4x + C$ b) $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + C$ c) $y = \frac{1}{3a}(ax + b)^3 + C$ d) $y = x\ln(x) - x + C$

144/2

a) $y^2 - (2x + 1)\,y + 1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{1+C\cdot e^x}\right)^2 - (2x+1)\cdot\left(x + \frac{1}{1+C\cdot e^x}\right) + 1 + x + x^2$

$= \ldots = \frac{-C\cdot e^x}{(1+C\cdot e^x)^2} + 1$ und $y' = \ldots = 1 + \frac{-C\cdot e^x}{(1+C\cdot e^x)^2}$

b) für $C \to \infty$: $y = x$

$\Longrightarrow$ $y^2 - (2x + 1)\,y + 1 + x + x^2 = x^2 - (2x+1)\cdot x + 1 + x + x^2 = \ldots = 1$

und $y' = 1$

144/3

a) $U_C = Q/C$; $U_L = L\,\dot{I}$ $\Longrightarrow$ $Q/C + L\,\dot{I} = 0$

gilt für alle Zeiten t ==> Gleichung muss auch für die Ableitung gelten ==> Behauptung

b) $\ddot{I}(t) = \ldots = -\omega^2 \cdot I(t)$

in DG einsetzen ==> ... $\omega^2 = \frac{1}{L\cdot C}$

144/4

$\dot{x}(t) = \ldots = A\,e^{-R\,t/2m}\left(-\frac{R}{2m}\sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)\right)$

$\ddot{x}(t) = \ldots = A\,e^{-R\,t/2m}\left(\left(\frac{R^2}{4m^2} - \omega^2\right)\sin(\omega t + \varphi) - \frac{R\omega}{m}\cos(\omega t + \varphi)\right)$

in DG einsetzen ==> ... $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{R^2}{4m^2}}$

Beachte: Eine (gedämpfte) Schwingung ist also nur möglich, wenn $\frac{D}{m} - \frac{R^2}{4m^2} > 0$ ist, also $R < \sqrt{4mD}$! (Für $R = \sqrt{4mD}$ hat man den sogenannten (in der Technik wichtigen!) „aperiodischen Grenzfall" (siehe dazu auch 117/18!), für $R > \sqrt{4mD}$ den „Kriechfall".)

144f/5

a) $k > 0 \Longrightarrow k\cdot\sqrt{1 + (y')^2} > 0 \Longrightarrow y'' > 0$ ==> Graph ist linksgekrümmt

b) $y' = \ldots = \frac{1}{2}\left(e^{kx+C} - e^{-(kx+C)}\right)$; $y'' = \ldots = \frac{k}{2}\left(e^{kx+C} + e^{-(kx+C)}\right)$

$1 + (y')^2 = \ldots = \left(\frac{1}{2}\left(e^{kx+C} + e^{-(kx+C)}\right)\right)^2$

in DG einsetzen ==> Behauptung

c) $TiP\left(-\frac{C}{k}\middle|\frac{1}{k}+D\right)$ d) $C = 0$; $k = \frac{\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right)^2}{8} \approx 0{,}136$; $D = 1 - \frac{8}{\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right)^2} \approx -6{,}37$

Lösungen III.2

145/6 *jeweils $C \in \mathbb{R}$*

a) $y = 1 + C\,e^{-x}$ c) $y = 1 + C\,e^{-0{,}5x^2}$ e) $y = C\,e^{-0{,}5x^2+x} - 1$ f) $y = C\,e^{\frac{1}{3}x^3 - x} - 1$

145/7

jeweils $C \in \mathbb{R}$; wenn nicht anders angegeben, erhält man die triviale Lösung jeweils für $C = 0$

a) $a\neq 0$: $y = C\,e^{ax} - \frac{b}{a}$; $a = 0$: $y = bx + C$; $D = \mathbb{R}$ b) $y = -\ln(C - 3x)$; $D =]-\infty; \frac{C}{3}[$

c) y = $e^{(C\,e^x)}$; D = R d) y = – arctan $\frac{1}{x+C}$ bzw. y = 0; D = R

e) y = C $e^{0,5ax^2}$; D = R f) a≠0: y = C · $e^{0,5ax^2} - \frac{b}{a}$; a = 0: y = 0,5 b x^2 + C; D = R

g) y = C · e^{x^3}; D = R

h) y = $\frac{1}{C-1,5x^2}$; C > 0: D = R\\$\left\{\pm\sqrt{\frac{2}{3}C}\right\}$; C = 0: D = R\\{0}; C < 0: D = R

bzw. y = 0; D = R

i) y = C e^{x^2-6x} – 4; D = R j) y = 1 + $\frac{C}{x}$; D = R k) y = C $e^{1/x}$ + 1; D = R^+

l) y = C · $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; D =]1; ∞[m) y = $\frac{C}{x^2-1}$; D =]1; ∞[

n) y = C · $\sqrt{1+x^2}$; D = R

o) y = $\frac{C}{ax^2-b}$; $\frac{b}{a}$ > 0: D = R\\$\left\{\pm\sqrt{\frac{b}{a}}\right\}$; $\frac{b}{a}$ = 0: D = R\\{0}; $\frac{b}{a}$ < 0: D = R

145/8

a) y = sin(x + C) mit C = $\frac{\pi}{6}$ + 2πk oder C = $\frac{5\pi}{6}$ + 2πk mit k ∈ N; D = R

b) y = $\frac{2}{1-\frac{1}{2}\exp\left(\frac{3}{8}\arctan\frac{x^2}{4}\right)}$; D = R

145/9

y' = 1 $-\ \frac{u'}{u^2}$ ==> ... Zwischenergebnis (s. Buch)

==> ... u = 1 + C e^x ==> y = x + $\frac{1}{1+C\,e^x}$; C ∈ ℝ

Die Lösung y = x (siehe 144/2b) erhält man so nicht!

145/10

a) Klammer auflösen, 2. binomische Formel rückwärts...

b) z = y – x ==> y' = z' + 1; einsetzen ==> ... z' = z (z – 1)

Zwischenergebnis im Buch falsch!

c) ... z = $\frac{1}{1+C\,e^x}$; C ∈ ℝ oder z = 0 ==> y = x + $\frac{1}{1+C\,e^x}$ oder y = x

145/11 N(t) = N(0) · $e^{-\lambda t}$

145f/12

a) k > 0 und b > 0 und b < G ==> G – b > 0 ==> $\dot{b}$ > 0 ==> b ist streng monoton zunehmend

b) ... $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{G-b}\right)$ db = k G ==> ... $\frac{b}{G-b}$ = D e^{kGt} ==> ... Zwischenergebnis (s. Buch)

c) b_0 = G $\frac{D}{D+1}$ ==> ... Behauptung

d) DG ableiten ==> $\ddot{b}$ = k $\dot{b}$ (G – b) + k b (G – $\dot{b}$)

WeP: $\ddot{b}$ = 0 ==> ... b = G/2

e) stärkstes Wachstum am WeP ==> b = G/2 ==> ... t = $\frac{-\ln D}{k\,G}$

146/13 ***vgl. 146/18!***

a) v = v_∞ = konstant ==> $\dot{v}$ = 0 ==> ... Behauptung

b) dv = $\left(g - \frac{k}{m}v^2\right)$ dt = $-g\left(\frac{v^2}{v_\infty^2} - 1\right)$ dt ==> ... Behauptung

c) ... $\frac{dw}{w^2-1} = -\frac{g}{v_\infty}\,dt$ ==> ... $\frac{1-w}{1+w} = C\,e^{-\frac{2g}{v_\infty}t}$ ==> ... Behauptung ***(VZ-Fehler in Buch!)***
d) $D = \frac{v_\infty - v_0}{v_\infty + v_0}$
$v(0) = 0$: $D = 1$ (==> $v(t) = v_\infty \tanh\left(\frac{g}{v_\infty}t\right)$)
$v(0) > v_\infty$: $D < 0$ (==> $v(t) = v_\infty \coth\left(\frac{g}{v_\infty}t - \frac{1}{2}\ln(-D)\right)$)
$v(0) < v_\infty$: $D > 0$ (==> $v(t) = v_\infty \tanh\left(\frac{g}{v_\infty}t - \frac{1}{2}\ln D\right)$)
$v(0) = v_\infty$: $D = 0$ (==> $v(t) = v_\infty$)
Anmerkung: Betrachtet man den senkrechten Wurf nach ***oben****, so hat man* $F_R = -k\,v^2$*, und statt tanh bzw. coth steht dann tan in der Lösung der DG.*

146/14
a) ... $du = \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}\,u$ ==> ... $u = e^{kx+C}$ ==> ... Behauptung
b) durch Integration folgt y; Ergebnis: siehe 144f/5b

15 bis 17: vgl. jeweils auch 145/7a!

147/15 a) $y(t) = a + C\,e^{-b^2 t}$ b) $t = \frac{\ln\frac{19}{14}}{6{,}0\cdot 10^{-3}\,s^{-1}} \approx 51$ s

147/16 a) $f(t) = 60\cdot 10^6 - 50\cdot 10^6\,e^{-0{,}2\,t}$ b) $t = \frac{\ln\frac{25}{6}}{0{,}2} \approx 7{,}1$ (Jahre)

147/17 a) $y(t) = k_0 + C\,e^{-\frac{Q}{V}t}$ b) $C = 6$

147/18 ***vgl. 146/13!*** a) $x(t) = \frac{e^t-1}{e^t+1}$ b) $t = \ln 1999 \approx 7{,}6$

148/22 b) $v(t) = g\,b - D\cdot e^{-\frac{t}{k}}$ mit $D \in \mathbb{R}$

Lösungen III.3

a) homogen
145/7 *jeweils* $C \in \mathbb{R}$
e) $y = C\cdot e^{\frac{1}{2}ax^2}$; $D = \mathbb{R}$
g) $y = C\cdot e^{x^3}$; $D = \mathbb{R}$
l) $y = C\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; $D =]1;\infty[$
m) $y = \frac{C}{x^2-1}$; $D =]1;\infty[$
n) $y = C\cdot\sqrt{1+x^2}$; $D = \mathbb{R}$
o) $y = \frac{C}{|ax^2-b|}$; $a = 0$: $D = \mathbb{R}$; $a \neq 0$: $\frac{b}{a} > 0$: $D = \left]-\infty; -\sqrt{\frac{b}{a}}\right[$ oder $\left]-\sqrt{\frac{b}{a}}; \sqrt{\frac{b}{a}}\right[$ oder $\left]\sqrt{\frac{b}{a}}; \infty\right[$;
$\frac{b}{a} = 0$: $D = \mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{R}^-$; $\frac{b}{a} < 0$: $D = \mathbb{R}$

145/11 $N(t) = N(0)\cdot e^{-\lambda t}$

b) inhomogen
147f/19 *jeweils* $C \in \mathbb{R}$
a) spezielle Lösung der inhomogenen DG: $y = 1$

allgemeine Lösung der homogenen DG: y = C · cos x
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = 1 + C · cos x
b) spezielle Lösung der inhomogenen DG: y = 3
allgemeine Lösung der homogenen DG: y = C · $\left(\frac{e}{x}\right)^x$
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = 3 + C · $\left(\frac{e}{x}\right)^x$
c) spezielle Lösung der inhomogenen DG: y = –1
allgemeine Lösung der homogenen DG: y = C · $e^{(e^x)}$
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = –1 + C · $e^{(e^x)}$
d) spezielle Lösung der inhomogenen DG: y = –1,2
allgemeine Lösung der homogenen DG: y = C · $e^{2{,}5x^2}$
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = –1,2 + C · $e^{2{,}5x^2}$
e) spezielle Lösung der inhomogenen DG: y = x
allgemeine Lösung der homogenen DG: y = C · $e^{-0{,}5x^2-2x}$
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = x + C · $e^{-0{,}5x^2-2x}$
f) spezielle Lösung der inhomogenen DG: y = e^{x^2}
allgemeine Lösung der homogenen DG: y = C · e^{-x^2}
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = e^{x^2} + C · e^{-x^2}
g) spezielle Lösung der inhomogenen DG: y = cos x
allgemeine Lösung der homogenen DG: y = $\frac{C}{\cos x}$
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = cos x + $\frac{C}{\cos x}$
h) spezielle Lösung der inhomogenen DG: y = ln x
allgemeine Lösung der homogenen DG: y = C · x
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = ln x + C · x
i) spezielle Lösung der inhomogenen DG: y = x^2
allgemeine Lösung der homogenen DG: y = C · x^{-3}
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = x^2 + C · x^{-3}
j) spezielle Lösung der inhomogenen DG: y = $\frac{2}{3}$
allgemeine Lösung der homogenen DG: y = C · $e^{3/x}$
==> allgemeine Lösung der inhomogenen DG: y = $\frac{2}{3}$ + C · $e^{3/x}$

c) Variation der Konstanten
145/7 *jeweils C, D ∈ ℝ*
a) a≠0: allgemeine Lösung der homogenen DG: ... y = C · e^{ax}
Variation der Konstanten ==> ... C' e^{ax} = b ==> ... y = D · $e^{ax} - \frac{b}{a}$
a = 0: y = bx + C
f) a≠0: allgemeine Lösung der homogenen DG: ... y = C · $e^{0{,}5ax^2}$
Variation der Konstanten ==> ... C' $e^{0{,}5ax^2}$= b x ==> ... y = D · $e^{0{,}5ax^2} - \frac{b}{a}$
a = 0: y = 0,5 b x^2 + C
i) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... y = C · e^{x^2-6x}
Variation der Konstanten ==> ... C' e^{x^2-6x} = 8 x – 24 ==> ... y = D · e^{x^2-6x} – 4
j) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... y = $\frac{C}{x}$
Variation der Konstanten ==> ... x $\frac{C'}{x}$ = 1 ==> ... y = 1 + $\frac{D}{x}$
k) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... y = C · $e^{1/x}$
Variation der Konstanten ==> ... x^2 C' $e^{1/x}$ = 1 ==> ... y = D · $e^{1/x}$ + 1

148/20 *jeweils C, D* ∈ R

a) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot x$
Variation der Konstanten ==> ... $x\,C'\,x = -b$ ==> ... $y = b + D \cdot x$
b) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot x$
Variation der Konstanten ==> ... $x\,C'\,x = ax^2 - b$ ==> ... $y = ax^2 + b + D \cdot x$
c) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot e^{ax}$
Variation der Konstanten ==> ... $C'\,e^{ax} = -a\,e^{ax}$ ==> ... $y = (-ax + D) \cdot e^{ax}$
$y(0) = 1$ ==> ... $y = (-ax + 1) \cdot e^{ax}$
d) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot e^{-x^2}$
Variation der Konstanten ==> ... $C'\,e^{-x^2} = x\,e^{-x^2}$ ==> ... $y = (0{,}5x^2 + D) \cdot e^{-x^2}$
e) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{x^4-1}$
Variation der Konstanten ==> ... $(x^2 + 1)\,\frac{C'}{x^4-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ==> ... $y = \frac{\frac{1}{3}x^3+x+D}{x^4-1}$
f) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{x+1}$
Variation der Konstanten ==> ... $\frac{C'}{x+1} = e^{-x}$ ==> ... $y = \frac{-(x+2)\,e^{-x}+C}{x+1}$
g) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot e^{-\tan x}$
Variation der Konstanten ==> ... $\cos^2 x\,C'\,e^{-\tan x} = \sin x \cos^2 x\;\; e^{-\tan x}$
==> ... $y = (-\cos x + D)\,e^{-\tan x}$
h) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{x-1}$
Variation der Konstanten ==> ... $\frac{C'}{x-1} = x - 1$ ==> ... $y = \frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + D}{x-1}$
$y(2) = 0$ ==> ... $y = \frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{2}{3}}{x-1}$
i) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot e^{-x}$
Variation der Konstanten ==> ... $C'\,e^{-x} = x\,e^{-x} + 1$ ==> ... $y = 0{,}5\,x^2\,e^{-x} + 1 + D\,e^{-x}$
j) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot (1 + x^2)$
Variation der Konstanten ==> ... $C'\,(1 + x^2) = 2x^3$ ==> ... $y = (x^2 - \ln(1 + x^2) + D) \cdot (1 + x^2)$
k) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot e^{x^2}$
Variation der Konstanten ==> ... $C'\,e^{x^2} = -x^3 + x$ ==> ... $y = 0{,}5x^2 + D \cdot e^{x^2}$
l) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot x^2$
Variation der Konstanten ==> ... $x\,C'\,x^2 = 2x^4$ ==> ... $y = x^4 + D\,x^2$
m) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$
Variation der Konstanten ==> ... $\frac{C'}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x\,(1+x^2)}$ ==> ... $y = \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} + D}{\sqrt{1+x^2}}$

148/21 *jeweils $C, D \in \mathbb{R}$*
a) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot e^{-4 \arctan x}$
Variation der Konstanten ==> ... $C'\,e^{-4 \arctan x} = \frac{9}{x^2+1}$ ==> ... $y = \frac{9}{4} + D \cdot e^{-4 \arctan x}$
b) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{1+x^2}$
Variation der Konstanten ==> ... $\frac{C'}{1+x^2} = \frac{\cos x}{x^2+1}$ ==> ... $y = \frac{\sin x + D}{x^2+1}$
c) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot x$
Variation der Konstanten ==> ... $x\,C'\,x = x^3 \sin x$ ==> ... $y = -x^2 \cos x + x \sin x + D \cdot x$
d) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot x$
Variation der Konstanten ==> ... $x\,C'\,x = \frac{2x^3+x^2}{x^2+1}$ ==> ... $y = x \ln(x^2 + 1) + x \arctan x + D \cdot x$
e) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{x}$

Variation der Konstanten ==> ... $x \frac{C'}{x} - x \cos x = 0$ ==> ... $y = \sin x + \frac{\cos x}{x} + \frac{D}{x}$
f) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot e^{-2x}$
Variation der Konstanten ==> ... $C' e^{-2x} - \sin(2x) = 0$ ==> ... $y = \frac{1}{4} (\sin(2x) - \cos(2x)) + D e^{-2x}$
g) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot (x^2 + 1)$
Variation der Konstanten ==> ... $C' (x^2 + 1) = x^2 - 1$ ==> ... $y = (x - 2 \arctan x + D) \cdot (x^2 + 1)$
h) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot e^{-1/(x+1)}$
Variation der Konstanten ==> ... $-(1 + x)^2 C' e^{-1/(x+1)} = (2x + 2) e^{-1/(x+1)}$
==> ... $y = (-2 \ln |x + 1| + D) \cdot e^{-1/(x+1)}$
i) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{x+1}$
Variation der Konstanten ==> ... $\frac{C'}{x+1} = \frac{1}{x(x+2)}$ ==> ... $y = \frac{\frac{1}{2}\ln(x^2+x) + D}{x+1}$
j) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{\sin x}$
Variation der Konstanten ==> ... $\frac{C'}{\sin x} = e^{\cos x}$ ==> ... $y = \frac{e^{\cos x} + D}{\sin x}$
k) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{x}$
Variation der Konstanten ==> ... $-x^2 e^{2x} + x \frac{C'}{x} =$ ==> ... $y = \frac{\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + D}{x}$
l) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = \frac{C}{\sqrt{2x+3}}$
Variation der Konstanten ==> ... $(2x + 3) \frac{C'}{\sqrt{2x+3}} = x$ ==> ... $y = \frac{1}{3} x - 1 + \frac{D}{\sqrt{2x+3}}$
m) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $y = C \cdot \cos^2 x$
Variation der Konstanten ==> ... $C' \cos^2 x = \sin x \cos x$ ==> ... $y = (-\ln \cos x + D) \cdot \cos^2 x$

148/22 *Anfangsbedingung v(0) = 0 beachten!*
a) allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $v(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)$
Variation der Konstanten ==> ... $\dot{C}(t) = \frac{g \cdot b}{k} \cdot e^{\frac{t}{k}}$ ==> ... $v(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)$
c) $v(t) \to g \cdot b$ für $t \to \infty$, d.h. für große Zeiten nähert sich die Geschwindigkeit immer mehr einer Grenzgeschwindigkeit $v_{grenz} = g \cdot b$ an.

148/23
allgemeine Lösung der homogenen DG: ... $I(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$
Variation der Konstanten ==> ... $\dot{C}(t) = \frac{U_0}{L} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t}$ ==> ... $I(t) = \frac{U_0}{R} + D \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$
$I(0) = 0$ ==> ... $I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$