Lösungen III.1

122/1 a) 2 b) 3 c) 1

122/2 rot

122/3 jeweils ableiten, einsetzen, …
a) y‘ = $\frac{1}{2}$; ja
b) y‘ = $5e^x$; nein
c) y‘ = $15x^2$; ja
d) $\dot{y} = -4e^{-t} + \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$; ja

122/6
ableiten, einsetzen, …
$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t)$
D = $m\omega^2$ ➔ f = $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$ nimmt bei steigender Masse, aber festem D, ab

122/7
$\dot{x}(t) = ... = A\, e^{-R\,t/2m}\left(-\frac{R}{2m}\sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)\right)$
$\ddot{x}(t) = ... = A\, e^{-R\,t/2m}\left(\left(\frac{R^2}{4m^2} - \omega^2\right)\sin(\omega t + \varphi) - \frac{R\omega}{m}\cos(\omega t + \varphi)\right)$
in DG einsetzen ==> ... $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{R^2}{4m^2}}$
Beachte: Eine (gedämpfte) Schwingung ist also nur möglich, wenn $\frac{D}{m} - \frac{R^2}{4m^2} > 0$ ist, also $R < \sqrt{4mD}$! (Für $R = \sqrt{4mD}$ hat man den sogenannten (in der Technik wichtigen!) „aperiodischen Grenzfall", für $R > \sqrt{4mD}$ den „Kriechfall".)

136/17 ableiten, einsetzen, …
y‘ = $(-x^2 + 5x - 8)\,e^{-x}$
y‘‘ = $(x^2 - 7x + 13)\,e^{-x}$

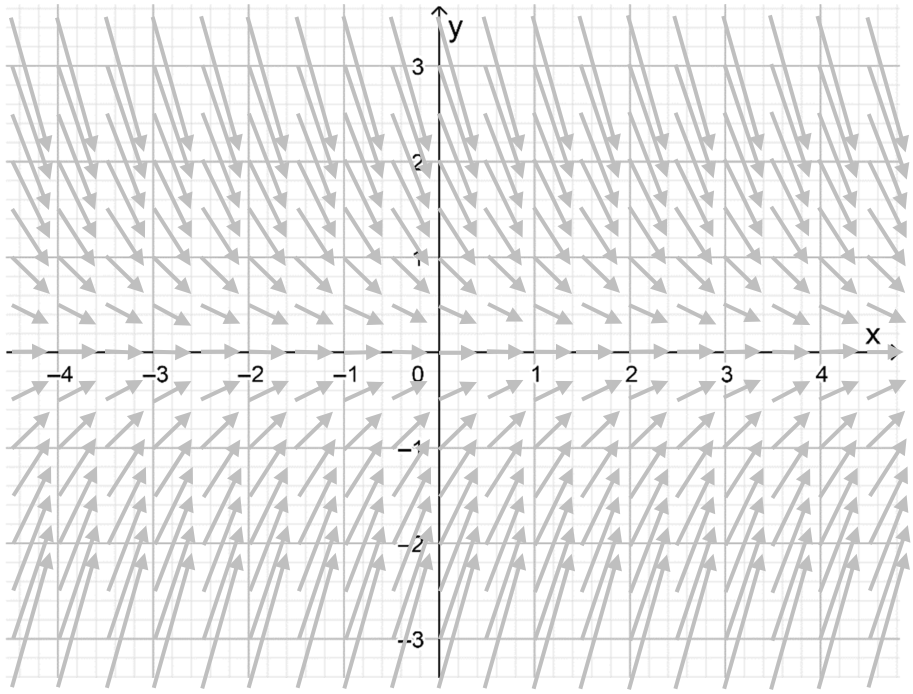
122/4
a) ableiten, einsetzen, …
y‘ = $Ce^x - x - 1$; y‘‘ = $Ce^x - 1$
b) y(x) = $e^x + 3 - 0{,}5x^2 - x$

122/5
a) ableiten, einsetzen, …
y‘ = 1 bzw. y‘ = $1 - \frac{C\,e^x}{(1+C\,e^x)^2}$
b) y(x) = $x + \frac{1}{1+e^x}$

122/8 ***(vgl. 109/9!)***
a) k > 0 ➔ $k \cdot \sqrt{1 + (y')^2} > 0$ ==> y'' > 0 ➔ Graph ist linksgekrümmt
b) y' = ... = $\frac{1}{2}\left(e^{kx+C} - e^{-(kx+C)}\right)$; y'' = ... = $\frac{k}{2}\left(e^{kx+C} + e^{-(kx+C)}\right)$
$1 + (y')^2 = ... = \left(\frac{1}{2}\left(e^{kx+C} + e^{-(kx+C)}\right)\right)^2$
in DG einsetzen… ➔ Behauptung
c) TiP$\left(-\frac{C}{k}\middle|\frac{1}{k}+D\right)$ d) C = 0; k = $\frac{\left(e^{1/2}-e^{-1/2}\right)^2}{8} \approx 0{,}136$; D = $1 - \frac{8}{\left(e^{1/2}-e^{-1/2}\right)^2} \approx -6{,}37$

135/2

a)



b)

<u>Lösungen III.2</u>

135/1 *jeweils $C \in \mathbb{R}$; wenn nicht anders angegeben, erhält man die triviale Lösung jeweils für $C = 0$*

a) $y = C\, e^{6x}$

b) $y = -\ln(C - 3x)$; $D =]-\infty; \frac{C}{3}[$

c) $a \neq 0$: $y = C\, e^{ax} - \frac{b}{a}$; $a = 0$: $y = bx + C$; $D = \mathbb{R}$

d) $y = e^{(C\, e^{x})}$; $D = \mathbb{R}$

e) $y = C\, e^{0{,}5ax^2}$; $D = \mathbb{R}$

f) $a \neq 0$: $y = C \cdot e^{0{,}5ax^2} - \frac{b}{a}$; $a = 0$: $y = 0{,}5\, b\, x^2 + C$; $D = \mathbb{R}$

g) $y = C \cdot e^{x^3}$; $D = \mathbb{R}$

h) y = $\frac{1}{C-1{,}5x^2}$;   C > 0: D = $\mathbb{R}\backslash\left\{\pm\sqrt{\frac{2}{3}C}\right\}$;   C = 0: D = $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;   C < 0: D = $\mathbb{R}$
bzw. y = 0;   D = $\mathbb{R}$

135/3 ***vgl. 137/26 !***
$y(t) = 20 + 50\, e^{-kt}$;   y in °C, t in s
$y(300) = 35 \Rightarrow k \approx 0{,}004$
Ob das Zuckern durch Jakob sinnvoll ist, kann mit den vorliegenden Informationen nicht beantwortet werden, da unklar ist, auf welche Temperatur der Kaffee durch den Zucker abgekühlt wird.

In den folgenden Aufgaben immer: C ∈ ℝ ; wenn nicht anders angegeben, erhält man die triviale Lösung jeweils für C = 0

135/4 $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + 1$

135/5 $y = \frac{1}{\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)}$

135/6 $y = \sqrt{\frac{x^2+3}{x-1}}$

135/7 $y = \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{8}\arctan(x^2/4)}}$

135/8
a) $x(t) = \frac{40}{1+199e^{-0{,}1t}}$
b) Auf lange Sicht erreicht der Baum eine Höhe von 40 m. Nach etwa 52,9 Jahren hat er die Hälfte seiner Höhe erreicht. Zu diesem Zeitpunkt wächst er momentan mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Jahr.
Den letzteren Wert bestimmt man geschickt mittels der Differenzialgleichung:
$\dot{x}(t_H) = 0{,}0025 \cdot x(t_H) \cdot \left(40 - x(t_H)\right) = 0{,}0025 \cdot 20 \cdot (40-20)$

136/9 $y = \frac{1}{4} - \frac{C}{4\,(x^2+4)^4}$

136/10 $y = 2 - \frac{4}{1+3e^{2x-2}}$

136/11 $y = 2 - C\, e^{-5\arctan(x)}$

136/12 $y = C\, e^{x^2+x} - 2$

136/13 $y = \frac{C}{\sqrt{x}^{\ln(x)}}$

136/14 $y = \frac{e^{-x}}{1-x}$; D = $]-\infty; 1[$

136/15 $y = \frac{1}{x^2-C}$ mit C < 0

136/16 $y = C\, e^{\arctan(x)} - 1$

136/18 $y = C\, e^{-1/x}$

136/19 y = $1 - \frac{C}{\ln(x)}$

136/20 y = $5 - C\,\frac{x-2}{x-3}$

136/21
a) m(t) = $\frac{4m_0}{25}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$
b) $\lim\limits_{t\to\infty} m(t) = \frac{4m_0}{25}$, d. h. auf lange Sicht entsteht 4/25 der Masse des Urans an Helium.

136/22 v(t) = 40 – 30 $e^{-t/10}$

136/23
a) N(t) = $\frac{5N_0}{N_0+(5-N_0)e^{-0,5t}}$
b) Auf lange Sicht wächst die Anzahl der Exemplare auf 5000 an, unabhängig vom Anfangswert. 90% des Endwertes werden nach der Zeit $t = 2\ln\left(\frac{45}{N_0} - 9\right)$ erreicht, d. h., je kleiner N_0 ist, desto länger dauert es, bis 90% des Endwertes erreicht werden.

137/24 U(t) = $U_1 \cdot \left(2e^{-t/RC} + 1\right)$

137/25
a) f(t) = $60\cdot10^6 - 50\cdot10^6\, e^{-0,2\,t}$
b) Auf lange Sicht gibt es in diesem Staat 60 Millionen Handys. Nach etwa 7,1 Jahren besitzen 60% der Einwohner ein Handy.

137/26 ***vgl. 135/3 !***
a) y(t) = a + C $e^{-b^2\,t}$
b) Nach etwa 51 s ist der Körper auf 35°C abgekühlt.

137/27
a) N(t) = $\frac{M^2kt}{Mkt+1}$
b) Nach der Zeit $t^* = \frac{99}{Mk}$ sind 99% des Endwertes erreicht.

137/28
a) v(t) = c $\frac{e^{2gt/c}-1}{e^{2gt/c}+1}$
b) $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = c$, d. h. c gibt die Grenzgeschwindigkeit an, die auf lange Sicht erreicht wird.

138/29
a) v(t) = gb $(1 - e^{-t/k})$
b) $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) =$ gb, d. h. auf lange Sicht wird die Grenzgeschwindigkeit g·b erreicht.

138/30 z(t) ≈ 1030 $e^{-0,0135t}$

138/31 v(t) = 5 $\frac{e^{t/2}-1}{e^{t/2}+1}$

138/32 a) y(t) = k_0 + C $e^{-\frac{Q}{V}t}$ b) C = 6

138/33 ***vgl. 136/10, 137/28, 138/31 !***
a) x(t) = $\frac{e^t-1}{e^t+1}$

b) Nach etwa 7,6 min sind 99,9% der Anfangsmenge zerfallen.