Lösungen II.1

94/2

a) $-3 \ln|x-2| + 2 \ln|x-3| + C$
b) $\ln|x-1| + \ln|x-4| + C$
c) $-\frac{1}{2} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x-6| + C$
d) $-4 \ln|x+2| + 2 \ln|x-2| + C$
e) $-\frac{3}{4} \ln|x+2| + \frac{2}{3} \ln|x-5| + C$
f) $\frac{2}{3} \ln|x+2| - \frac{3}{4} \ln|x-5| + C$
g) $3 \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x-7| + C$
h) $4 \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+7| + C$
i) $3 \ln|x| + \ln|x+4| + \ln|x-4| + C$
j) $\ln|x+1| - 2 \ln|x-2| + 3 \ln|x-3| + C$
k) $2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-5| + C$
l) $-0{,}4 \ln|x| - \ln|x+3| + 2{,}5 \ln|x-3| + C$
m) $3 \ln|x+1| - 0{,}5 \ln|x+6| - 2 \ln|x-3| + C$
n) $x^2 - x + \ln|x-4| - 2 \ln|x-5| + C$
o) $2x^2 - 2x - 5 \ln|x+2| + 0{,}2 \ln|x-2| + C$
p) $-1{,}5x^2 + 2x - 3 \ln|x+3| + 0{,}5 \ln|x-3| + C$
q) $x^2 + x + \frac{4}{3} \ln|x-3| + \frac{3}{4} \ln|x-4| + C$
r) $0{,}25x^2 - x - 3 \ln|x| - 3 \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + C$
s) $0{,}375x^2 + 0{,}5 \ln|x| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + C$
t) $0{,}25x^2 - 2 \ln|x-1| + 4 \ln|x+4| + \ln|x+5| + C$
u) $0{,}125x^2 + x + 0{,}5 \ln|x+1| + 2 \ln|x-0{,}5| - 2 \ln|x-\frac{1}{3}| + C$

Lösungen II.2

95/3

a) $x \cdot \frac{1}{6}(x-3)^6 - \frac{1}{42}(x-3)^7 + C$
b) $\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$
c) $-\frac{1}{4} e^{-2x} (\sin(2x) + \cos(2x)) + C$
d) $0{,}25x^2 - 0{,}25\, x \sin(2x) - 0{,}125 \cos(2x) + C$
e) $x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$
f) $x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$ ***Substitution nötig?!?***
g) $x \arccos(x/a) - a \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + C$ ***Substitution nötig?!?***
h) $x \ln \frac{3x+2}{2x-1} + 0{,}5 \ln|2x-1| + \frac{2}{3} \ln|3x+2| + C$
i) $-\frac{\ln x}{x+1} + \ln|x| - \ln|x+1| + C$

95/4

a) $\frac{3}{16} e^4 + \frac{1}{16}$ c) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $9 - 9 e^6$ d) $-\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{14}{3} \ln 14 - 4$ f) $a \ln \frac{64}{27}$

114/9

e) $\int f_a(x)\,dx = \cdots = -\frac{1}{a}\ e^{-ax}\cos x + \frac{1}{a^2}\ e^{-ax}\sin x - \frac{1}{a^2}\int f_a(x)\,dx$ ==> ... s. Buch

f) A = $\int_0^{2\pi}(g_a(x) - f_a(x))\,dx = \left[-\frac{1}{a}\,e^{-ax}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{e^{-ax}}{a^2+1}(\sin x - a\cos x)\right]_0^{2\pi}$ = ... (s. Buch)

g) mit de l'H: $A_a \to 2\pi$ für $a \to 0$

115/10

a) 1/x aufleiten, ln x ableiten ==> ... $f_k(x) = 2\,(\ln x)^2 - k\ln x + C$ b) C = 0

e) ln x aufleiten, (2 ln x – k) ableiten ==> ... $A(k) = (k-4)\,e^{k/2} + k + 4$

$A(k) = 8$ ==> $(k-4)\,(e^{k/2} + 1) = 0$ ==> k = 4

g) ähnlich wie in (e): $F_a(x) = ... = 2x\,(\ln(x) - 2)^2 - 2a\,(\ln(a) - 2)^2$; $a > 0$

h) gleichsetzen mit Ergebnis in (g) ==> ... $a = e^2$

Lösungen II.3

95/5

a) $\frac{1}{16}\,(4x-3)^4 + C$

b) $\frac{1}{6}\,(x+1)^6 + C$

c) $\frac{1}{5}\,(x^2-4)^5 + C$

d) $-\frac{1}{36}\,(-2x^3+7)^6 + C$

e) $\frac{1}{80}\,(4x^4-5)^5 + C$

f) $-\frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{4}{3(x+2)^3} + C$

g) $\frac{2}{(2-x)^2} - \frac{4}{2-x} - \ln|2-x| + C$

h) $\frac{8}{3(2-x)^3} - \frac{6}{(2-x)^2} + \frac{6}{2-x} + \ln|2-x| + C$

i) $\frac{1}{x^2+1} + C$

j) $0{,}5\ln|x^2+4x-1| + C$

k) $0{,}5\sin(x^2) + C$

l) $\frac{1}{3}\,(\sin x)^3 + C$

m) $\frac{1}{4}$

n) $\frac{3}{16}$

o) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

p) $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

q) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x +$

r) $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C$

s) $\frac{1}{3}\sin(3x) + C$

t) $-2\sqrt{1-\sin x} + C$

u) $\ln|x + \sin x| + C$

v) $0{,}5\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$ (siehe 90/1)

w) = Beispiel 12, Seite 88

x) $(x-1)\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) + 0{,}5\ln((x-1)^2+1) + C$

95/6

a) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C$ b) $-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$ c) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$

96/7

a) $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}-1)$

b) $\frac{1}{6}\,(2x-3)^{3/2} + \frac{3}{2}\sqrt{2x-3} + C = \frac{1}{3}\,(x+3)\sqrt{2x-3} + C$

c) $\frac{2}{3}\,(1-x)^{3/2} - 2\sqrt{1-x} + C = -\frac{2}{3}\,(x+2)\sqrt{1-x} + C$

d) $\arctan\sqrt{x^2-1} + C$

e) $0{,}5\ln\frac{1+9e^{-4}}{1+9e^4} + 4 \approx 0{,}977$

f) $-\ln|1-e^x| + C$

g) $-\ln|e^{-x}+1| + C$

h) $\ln|e^x - e^{-x}| + C$

96/8

a) $0{,}5x + 0{,}25\sin(2x) + C$ b) $0{,}5x - 0{,}25\sin(2x) + C$

c) $= \int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx$; $z = \sin(x/2)$ ==> ... $= \int\frac{1}{z\,(1-z^2)}\,dz$

Partialbruchzerlegung ==> ... $= \ln|z| - 0{,}5\ln|1+z| - 0{,}5\ln|1-z| + C$

$= ... = 0{,}5\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$

d) $= -\int\frac{1}{\sin z}\,dz = ... = -0{,}5\ln\frac{1-\cos z}{1+\cos z} + C = 0{,}5\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$

96/10

a) = ... = ln |z| + C = ln |x + $\sqrt{x^2+a^2}$| + C (= arsinh(x/a) + C')

b) mit z = x + $\sqrt{x^2-a^2}$ ==> = ... = ln |x + $\sqrt{x^2-a^2}$| + C (= arcosh(x/a) + C')

c) angegebene Formel: Brüche auf rechter Seite zusammenfassen ==> ...

mit dieser Formel und partieller Integration (Phönix!):

$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}dx + a^2 \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$ + C

==> $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$ = 0,5 x $\sqrt{x^2+a^2}$ + 0,5 $a^2 \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$ + D

= 0,5 x $\sqrt{x^2+a^2}$ + 0,5 a^2 arsinh(x/a) + D'

d) 0,5 x $\sqrt{x^2-a^2}$ – 0,5 $a^2 \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$ + D

= 0,5 x $\sqrt{x^2-a^2}$ – 0,5 a^2 arcosh(x/a) + D'

bzw. 0,5 x $\sqrt{a^2-x^2}$ + 0,5 a^2 arcsin(x/a) + D ***(„Kreisintegral", siehe FS!)***

= 0,5 x $\sqrt{a^2-x^2}$ – 0,5 a^2 arccos(x/a) + D'

115/10 a) z = ln x substituieren ==> ... $f_k(x) = 2 (\ln x)^2 - k \ln x + C$ b) C = 0

Lösungen II.4

96/9

a) x = 2 arctan t ==> ...

b) sin x = 2 sin(x/2) cos(x/2) = 2 tan(x/2) $\cos^2$(x/2) = 2 tan(x/2) $\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ = ...

man könnte versuchen: cos x = $\sqrt{1-\sin^2 x}$ = ... ; daraus erhält man allerdings den Betrag!

statt dessen prüfen: Ableitungen und Funktionswerte gleich! (oder: VZ extra prüfen)

c) = ... = $\int \frac{4}{4+2t^2}\, dt$ = ... = $\sqrt{2}$ arctan(t/$\sqrt{2}$) + C = $\sqrt{2}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}$ + C

96/11

a) 0,5 ln |4x – 1| + C

b) –2 ln |3 – x| + C

c) –1,5 ln |1 – 2x| + C

d) 0,5 ln |2x^2 – 6x + 4| + C

e) $\frac{2}{3}$ ln |3x^2 + 3x + 1| + C

f) $-\frac{1}{32}$ ln |(8x – 2)^2 + 1| + C

g) ln |(x – 3)^3 + 27| + C

h) $\frac{1}{6}$ ln |4x^3 + 3x^2 + 8| + C

i) $\frac{1}{2}$ ln |4x^4 + 3x^2 – 5| + C

97/12

a) 3 ln |x – 2| $-\frac{1}{x-2}$ + C

b) $\frac{1}{9}\left(\ln|3x-5| + \frac{1}{3x-5}\right)$ + C

c) –2 ln |x + 3| $-\frac{12}{x+3}$ + C

d) $-\frac{1}{4}\left(\ln|2x-1| + \frac{11}{2x-1}\right)$ + C

e) $-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$ + C

f) $\frac{1}{9}\left(\ln|3x-2| - \frac{8}{3x-2}\right)$ + C

g) $\frac{1}{4}\left(-\frac{5}{2x+5} + \frac{21}{2(2x+5)^2}\right)$ + C

h) $-\frac{1}{64}\left(3\ \ln|3-4x| + \frac{2}{3-4x} + \frac{53}{2(3-4x)^2}\right)$ + C

i) $\frac{1}{8}\left(2\ln|2x+5| - \frac{30}{2x+5} - \frac{52}{(2x+5)^2}\right)$ + C

97/13

a) 0,5 arctan(2x) + C
b) $\frac{1}{5}\arctan\frac{4}{5}x$ + C
c) $\frac{1}{9\sqrt{5}}\arctan(\sqrt{5}x)$ + C
d) $\frac{1}{16}\arctan(x-1{,}5)$ + C
e) $\frac{1}{6}\arctan\frac{2x-5}{6}$ + C
f) $\frac{1}{ac}\arctan\frac{ax+b}{c}$ + C

97/14

a) 0,25 ln $\left|\frac{x+4}{x+8}\right|$ + C
b) $-\frac{1}{2x+12}$ + C
c) $\frac{1}{5}\arctan\frac{x-4}{5}$ + C
d) $\frac{1}{12}$ ln $\left|\frac{x-4{,}5}{x-1{,}5}\right|$ + C
e) $\frac{1}{12}\arctan\frac{3x+1}{4}$ + C
f) $\frac{1}{3x-12}$ + C
g) $\frac{1}{7}\arctan(7x+2)$ + C
h) arctan(3x + 12) + C
i) –arctan(2x + 10) + C

97/15

a) 0,25 ln $((2x-2)^2+1)$ + 1,5 arctan(2x – 2) + C
b) $-\frac{1}{12}$ ln $((6x+12)^2+1)$ + $\frac{7}{3}$ arctan(6x + 12) + C
c) –2 ln |x – 7|+ $\frac{25}{2x-14}$ + C
d) $\frac{1}{6}$ ln $((6x-3)^2+4)$ + $\frac{5}{6}$ arctan(3x – 1,5) + C
e) $-\frac{6}{7}$ ln |x – 2| + $\frac{5}{7x-14}$ + C
f) $\frac{1}{8}$ ln $((2x-\frac{4}{3})^2+1)$ + $\frac{1}{6}$ arctan$(2x-\frac{4}{3})$ + C

Lösungen II.5

71/17 $A_t = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) \to \frac{1}{2}$ für $t \to \infty$

74/32 a) $8\sqrt{2}$ b) $12\sqrt[3]{6}$ c) $20\sqrt[5]{2}$ d) ∞ e) 1 f) 0,5 g) π h) ∞

74/33

a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0; -2\}$; $x_1 = 1$; w. As.: y = 0; s. As.: x = 0 und x = –2
TiP$\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{4}{3}\right)$; HoP$\left(2\middle|\frac{1}{32}\right)$
b) angegebene Formel: Brüche auf rechter Seite zusammenfassen ==> ...
==> ... = 0,5 – 0,25 ln 3

74/34

a) $$\int_a^\infty \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-k+1}\frac{1}{x^{k-1}}\right]_a^b & \text{für } k<1 \\ \lim\limits_{b\to\infty}[\ln|x|]_a^b & \text{für } k=1 \\ \lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-k+1}\,\frac{1}{x^{k-1}}\right]_a^b & \text{für } k>1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \text{für } k<1 \\ \infty & \text{für } k=1 \\ \frac{a^{1-k}}{k-1} & \text{für } k>1 \end{cases}$$

b) $$\int_0^b \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{-k+1}\frac{1}{x^{k-1}}\right]_a^b & \text{für } k<1 \\ \lim\limits_{a\to 0^+}[\ln|x|]_a^b & \text{für } k=1 \\ \lim\limits_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{-k+1}\,\frac{1}{x^{k-1}}\right]_a^b & \text{für } k>1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{b^{1-k}}{k-1} & \text{für } k<1 \\ \infty & \text{für } k=1 \\ \infty & \text{für } k>1 \end{cases}$$

74/35

a) siehe 34 (b) !
b) $e^x > 1$ für $x \in\ ]0; 1]$, da $e^0 = 1$ ist und e^x streng monoton zunimmt ==> $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{x}$
==> $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx > \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ==> divergiert (vgl. (a) bzw. 34 (b) !)

c) f(x) := ln(x) – x + 1 ==> f(1) = 0 und f '(x) = $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ < 0 für x > 1
==> f ist streng monoton abnehmend für x > 1 ==> f(x) < 0 für x > 1
==> ln(x) – x + 1 < 0 ==> ln(x) + 1 < x ==> Behauptung
==> $\int_1^\infty \frac{1}{1+\ln x}\,dx > \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ==> divergiert (vgl. 34 (a) !)
d) $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ ==> Polstellen 1. Ordnung $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ ==> Integral divergiert jeweils bei 1 und bei 2 (vgl. (a) und 34 (b)); wer's nicht sieht, betrachtet die beiden Summanden einzeln und substituiert noch z = x – 2 bzw. z = x – 1 (oder berechnet gleich F)
für |x| → ∞ konvergiert das Integral dagegen, da F(x) = ln $\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$ + C → 0 !
(Anmerkung: Der Graph ist symmetrisch zu x = 1,5, es genügt also eigentlich sogar, wenn man nur eine Hälfte, also nur eine der beiden Polstellen, betrachtet.)

97/16
a) –1
b) divergiert:
(1) für x → ∞ ist der Nenner ≈ x^2, und das Integral über $x/x^2 = 1/x$ ergibt ln x, was für x → ∞ divergiert
(2) oder umständlich: zunächst $z = x^4$ substituieren, unter der Wurzel quadratisch ergänzen, dann u = 2z+1 substituieren... ==> = $\left[\ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right|\right]_1^\infty = \infty$
c) zweimalige partielle Integration ==> ... = 0,5
d) partielle Integration ==> ... = 1/9
e) z = $\sqrt{x-1}$ substituieren ==> ... = π
f) partielle Integration ==> ... = π/4
g) $\sqrt{2} - 1$
h) unter der Wurzel quadratisch ergänzen, z = 2x–1 substituieren ==> ... = π
i) divergiert:
(1) für |x| → ∞ ist der Nenner ≈ $4x^2$, und das Integral über $x/4x^2 = 1/4x$ ergibt 0,25 ln |x|, was für |x| → ∞ divergiert
(2) oder: ... = $\left[0{,}125\ \ln\left|x^2 + \frac{9}{4}\right|\right]_{-\infty}^\infty = \infty$

115f/11
i) mit z = ln x ==> ... = $\int_1^{\ln x} \frac{1}{z^2+1}\,dz$ = ... (siehe Buch)
j) F(x) → $-\frac{3\pi}{4}$ für x → 0^+; F(x) → $\frac{\pi}{4}$ für x → ∞ k) π
l) F' = f = 0 ==> keine Lösung ==> keine lokalen ExP; F'' = f ' = 0 ==> $x_1 = e^{-1}$ ohne VZW ==> kein WeP

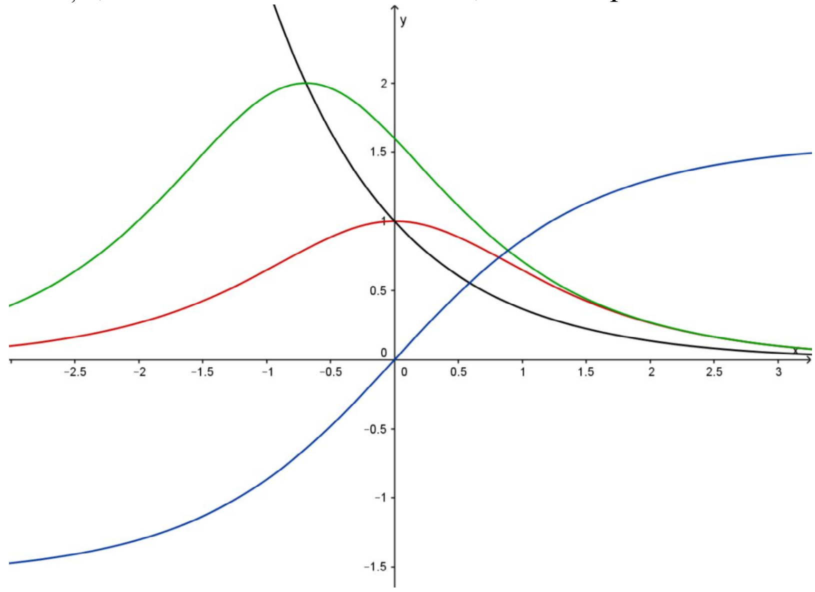
116/13 g) mit $z = -ax^2$ folgt relativ einfach das im Buch angegebene Ergebnis h) 12

117/15

g) mit $z = e^t$ folgt relativ einfach das im Buch angegebene Ergebnis h) π

i) $x_0 = \ln(\tan(0{,}5 + 0{,}25\pi)) \approx 1{,}23$

j) rot: G_1; grün: $G_{0\rightarrow,25}$; schwarz: Ortskurve der ExP; blau: Graph von F



<u>Lösungen II.5</u>

74/36 a) $f_o(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}$; $f_u(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}$; jeweils $D = [-r; r]$

b) $V = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}} = \ldots = 4\,a\,\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4\,a\,\pi \cdot A_{\text{Halbkreis}} = 4\,a\,\pi \cdot \frac{1}{2}\pi\,r^2 = 2\pi^2 a r^2$

74/37 $\pi^2/2$

74/38

a) $F_a'(x) = \ldots = f_a(x)$; $A_a = \ldots = a$

b) $\left(\frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)\right)' = \ldots = \cos^2 x$; $V = \pi \int_0^{\pi} (f^{-1}(x))^2\,dx = \ldots = \pi^2 a^2/2$

75/39

a) $f(x) = r_2 + \frac{r_1 - r_2}{h}x$; $D = [0; h]$; $V = \ldots = \frac{1}{3}\pi\,h\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

b) $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; $D = [-a; a]$; $V = \ldots = \frac{4}{3}\pi\,a\,b^2$

c) $f^{-1}(x) = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}$; $D = [-b; b]$; $V = \ldots = \frac{4}{3}\pi\,a^2\,b$

75/40 $V(b) = \pi\left(1 - \frac{1}{b}\right) \to \pi$ für $b \to \infty$

D. h., der sich unendlich weit nach rechts erstreckende Rotationskörper hat ein endliches Volumen! („Gabriels Horn", nach dem Erzengel, oder „Torricellis Trompete", nach dem italienischen Mathematiker Evangelista Torricelli, 1608-1657) Und das, obwohl die Fläche zwischen G_f und der x-Achse in von 1 bis ∞ unendlich groß ist!!!

75/41 $f^{-1}(x) = \sqrt{-2\ln x}$ ==> ..... $V = 2\pi$

(Anmerkung: Damit und mit noch ein paar Tricks zusätzlich kann man $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ zeigen.)

75/42

$h^{-1}(x) = \sqrt{\sin^2 x + 4}$ (beachte: + vor der Wurzel, weil $D_h = [2; \sqrt{5}[$!

$\left(\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\right)' = ... = \sin^2 x$; $\quad V = \pi \int_0^{\pi/2} (h^{-1}(x))^2\, dx = ... = 9\pi^2/4$

75/43

$\left(-\frac{1}{2} e^{4-2x} \cdot (x^2 + x + \frac{1}{2})\right)' = ... = x^2 \cdot e^{4-2x}$

$V = \pi \int_1^3 x^2 e^{4-2x}\, dx = ... = \frac{\pi}{2} (2{,}5\, e^2 - 12{,}5\, e^{-2}) \approx 26{,}36$

75/44

a) $A = \pi r^2$; $U_S = 2\pi a \Longrightarrow V = 2\pi^2 a r^2$

b) $U_S = 4\pi$; $A = \int_1^3 (-1{,}5x^2 + 6x + 4{,}5)dx = ... = 2 \Longrightarrow V = 8\pi$

c) $V = A \cdot 2\pi y_S \Longrightarrow ...\ y_S = 3/5$ *(= y-Koordinate des Schwerpunkt der Parabelfläche!)*

d) $y_S = ... = r/3$ *(= y-Koordinate des Schwerpunkt des rechtwinkligen Dreiecks!)*