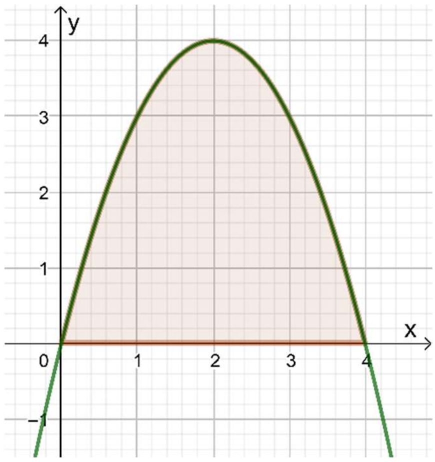
Lösungen II.1

41/1

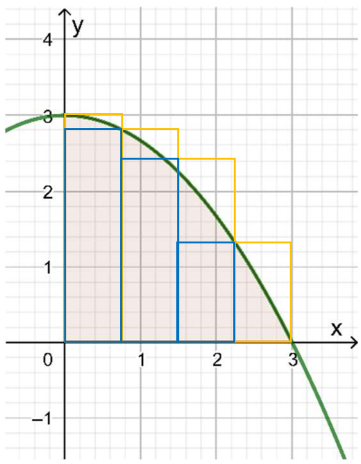
a,b) Nst.: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$



c) $U_4 = 6 < A < O_4 = 14$

41/2

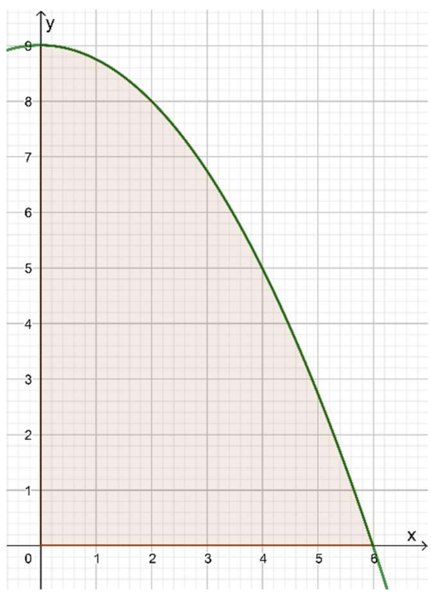
a)



b) $O_4 = 7{,}03125$; $U_4 = 4{,}78125$

41/3

a)

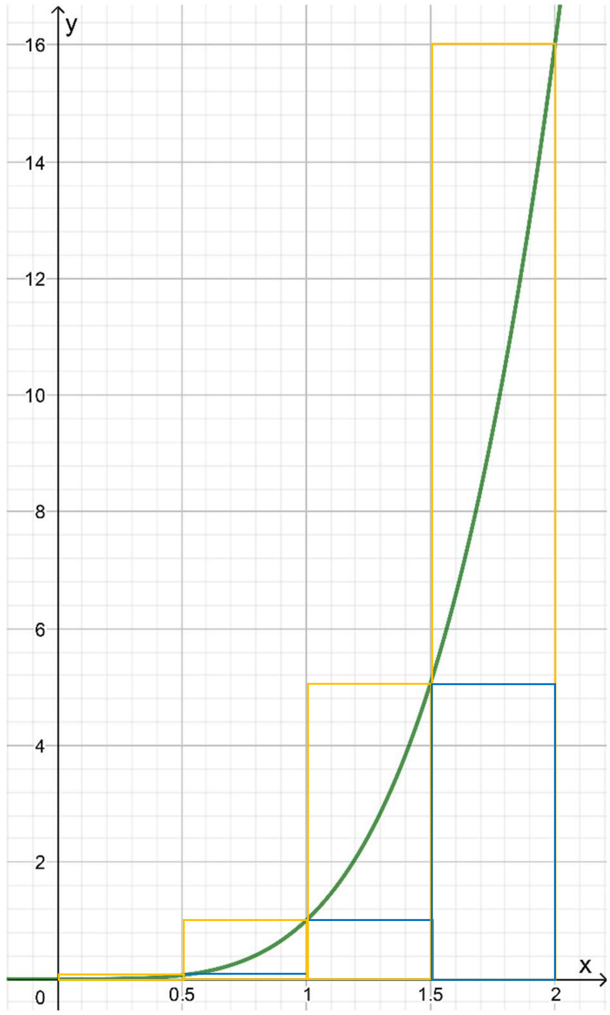


b) $U_3 = 26 < A < O_3 = 44$; $U_6 = 31{,}25 < A < O_6 = 40{,}25$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \cdots = \lim_{n\to\infty} 54\left(-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}+1\right) = 36;\quad \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{54}{n}+U_n\right) = 36$$

41/4 $U_8 = 8{,}15625$; $O_8 \approx 12{,}8704$ (beim Streifen zwischen 2,5 und 3 muss man das Maximum der Funktion verwenden!)

41/5 a,b)



c) $O_4 = 11{,}0625$; $U_4 = 3{,}0625$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{16}{15}\left(6 + \frac{15}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right) = 6{,}4$; $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(O_n - \frac{32}{n}\right) = 6{,}4$

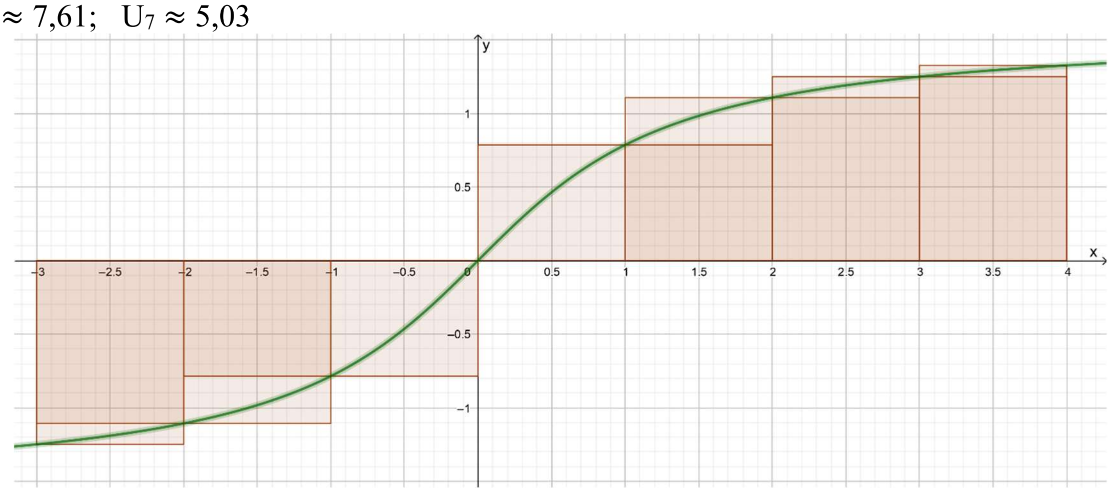
53/1 a) 2870 b) 72795 c) 10 497 600 d) 3 304 800

53/2

a) (vgl. 7a!) $f'(x) = -0{,}5x - 1 > 0$ in $]-6; -2[$ ➔ G_f ist sms in I; $O_5 = 16{,}16$; $U_5 = 12{,}96$

b) $g'(x) = \frac{2}{3}x - 1 > 0$ in $[2;4]$ ➔ G_g ist sms in I; $O_4 = -5{,}25$; $U_4 = -6{,}25$

53/4 $O_7 \approx 7{,}61$; $U_7 \approx 5{,}03$



53/5 $U_5 \approx 4{,}79$; $O_5 \approx 6{,}58$

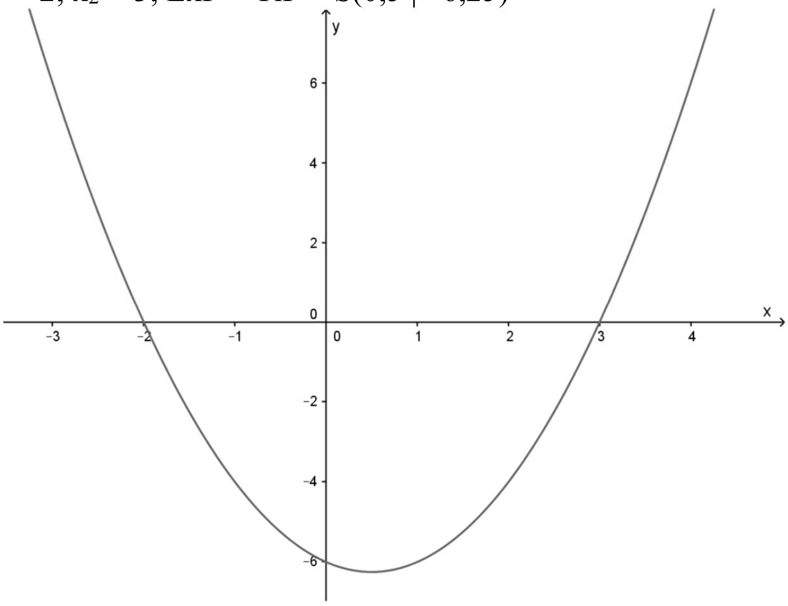
53/6 Man könnte z. B. Trapeze verwenden, oder Parabelstücke, falls man den Flächeninhalt unter diesen bereits kennt. Siehe dazu:
https://de.wikipedia.org/wiki/Trapezregel#Sehnentrapezformel
https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel

53/7
a) (vgl. 2a!) G_f ist sms in $]-\infty;\ -2]$, smf in $[-2;\ \infty[$
$O_n = \ldots = \frac{44}{3} + \frac{8}{n} - \frac{8}{3n^2}$; $U_n = \ldots = \frac{44}{3} - \frac{8}{n} - \frac{8}{3n^2}$
b) G_g ist sms in $]-\infty;\ -0{,}5]$, smf in $[-0{,}5;\ \infty[$
$O_n = \ldots = \frac{15}{4} + \frac{3}{n} - \frac{3}{4n^2}$; $U_n = \ldots = \frac{15}{4} - \frac{3}{n} - \frac{3}{4n^2}$

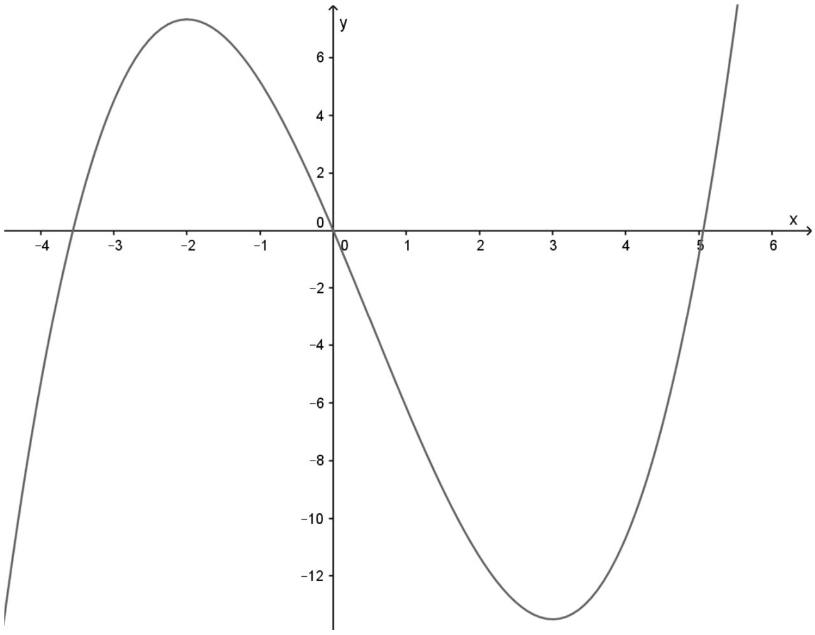
53/8 a) $O_4 \approx 0{,}741$; $U_4 \approx 0{,}473$ b) $O_4 \approx 1{,}979$; $U_4 \approx 1{,}724$

Lösungen II.2

48/2
a) Nullstellen von f: $x_1 = -2$; $x_2 = 3$; ExP = TiP = S(0,5 | –6,25)



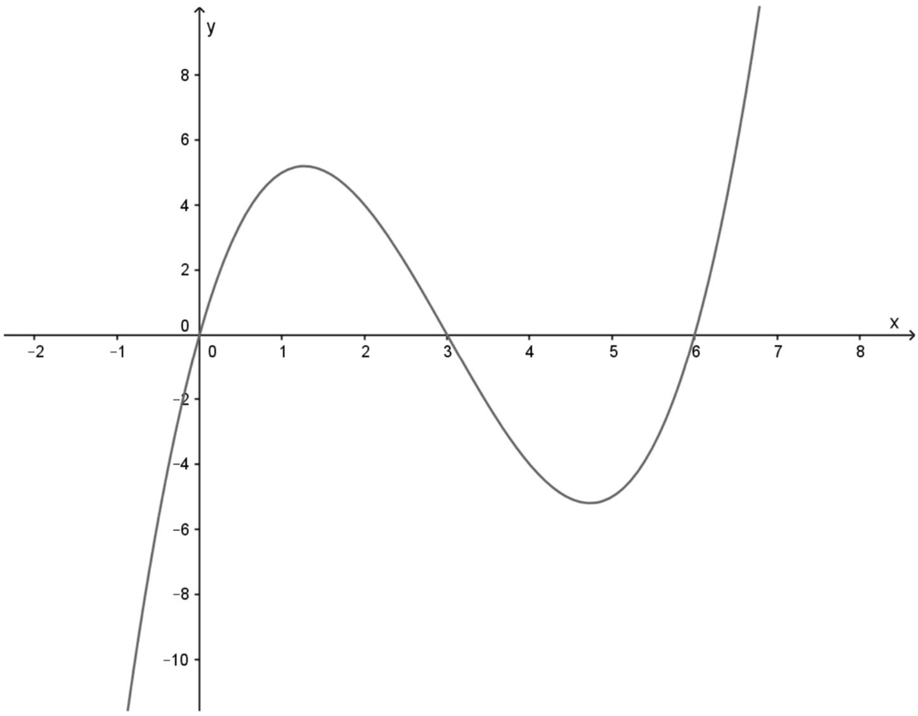
$F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ ➔ Nullstelle $x_1 = 0$
mit G_f folgt: weitere Nullstellen $x_2 < -2$; $x_3 > 3$
b) aus VZ von f folgt: G_F ist sms in $]-\infty; -2]$ und $[3; \infty[$, smf in $[-2; 3]$
➔ HoP bei –2; TiP bei 3
aus Monotonie von G_f folgt: G_F ist RK in $]-\infty; 0{,}5]$, LK in $[0{,}5; \infty[$ ➔ WeP bei 0,5
c) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$
Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{297}}{4}$ ➔ $x_2 \approx 5{,}06$; $x_3 \approx -3{,}56$
HoP$(-2 \mid \frac{22}{3})$; TiP$(3 \mid -13{,}5)$; WeP$(0{,}5 \mid -3\frac{1}{12})$



48/3

a) Nullstellen von f: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 6$

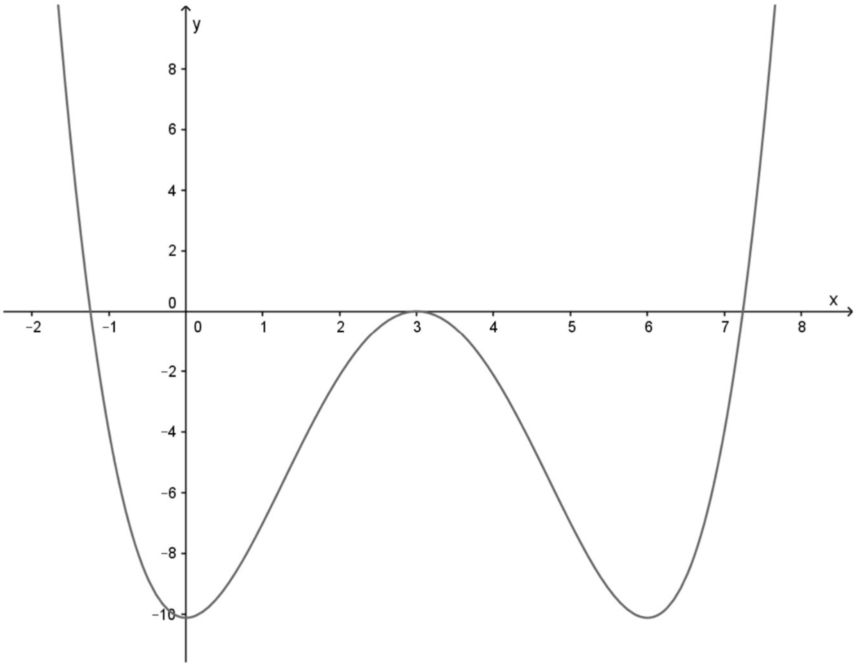
TiP($3 + \sqrt{3} \approx 4{,}73 \mid\ \approx -5{,}20$); HoP($3 - \sqrt{3} \approx 1{,}27 \mid\ \approx 5{,}20$)



$F(3) = \int_3^3 f(t)dt = 0$ ➔ Nullstelle $x_{1,2} = 3$ (weil auch einf. Nst. von f ➔ doppelt)
mit G_f folgt: weitere Nullstellen $x_3 < 0$; $x_4 > 6$

b) aus VZ von f folgt: G_F ist sms in [0; 3] und [6; ∞[, smf in]−∞; 0] und [3; 6]
➔ HoP bei 3 (➔ Nullstelle 3 ist doppelt!); TiP bei 0 und bei 6
aus Monotonie von G_f folgt: G_F ist linksgekrümmt in $]-\infty; 3-\sqrt{3}]$ und $[3+\sqrt{3}; \infty[$, rechtsgekrümmt in $[3-\sqrt{3};\ 3+\sqrt{3}]$ ➔ WeP bei $3-\sqrt{3}$ und bei $3+\sqrt{3}$

c) $F(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 81)$
Nullstellen: $x_{1,2} = 3$; $x_{3,4} = 3 \pm 3\sqrt{2}$ ➔ $x_3 \approx 7{,}23$; $x_4 \approx -1{,}23$
HoP(3 | 0); $TiP_1(0 \mid -10{,}125)$; $TiP_2(6 \mid -10{,}125)$; $WeP_{1,2}(3 \pm \sqrt{3} \mid -5{,}625)$

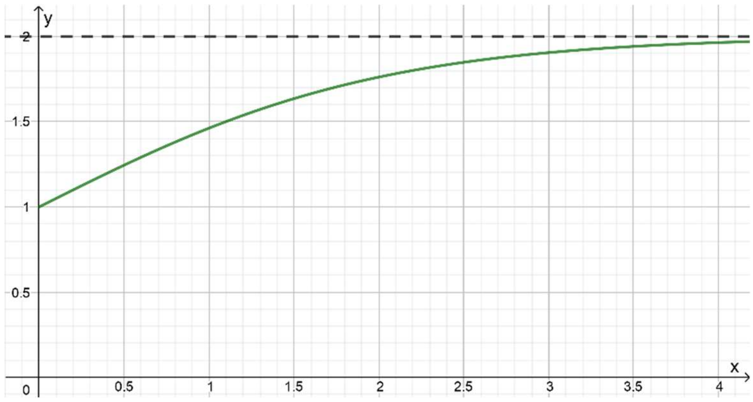


48/4
a) $A_{gesamt} = F(7) - F(1) \approx 7,6$; $A_{links} = F(4) - F(1) \approx 2,6$ ==> $A_{rechts} \approx 5$ ==> Verhältnis ≈ 1:2
b) $B = F(6) - F(3) \approx 4,5$

54/11
a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0,5\}$; $x_1 = 0$
G_f ist sms in [0; 0,5[und]0,5; 1], smf in $]-\infty; 0]$ und $[1; \infty[$
TiP(0|0);   HoP(1| ≈ −1,25)

b) *praktisch nur lösbar, wenn man vorher G_f zumindest skizziert…*
G_F ist sms in D_F ➔ eine Nst.: $x_1 = -1$
G_F ist rechtsgekr. in $]-\infty; 0]$, linksgekr. in [0; 0,5[; WeP bei $x_1 = 0$

54/12
a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$; G_f ist sms in D_f;   Rand-TiP(0|1)



b) G_f ist sms ➔ f ist umkehrbar
$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$; $D_{f^{-1}} = [1; 2[$; $W_{f^{-1}} = [0; \infty[$

c) G_F ist sms und linksgekr. in D_F;   Rand-TiP(0|0)

d) $G'(x) = \ldots f(x)$; $F(x) = G(x) - G(0) = 2\ln(e^x + 1)$

e) Der Inhalt der Fläche, die von G_f und seiner Asymptote eingeschlossen wird, beträgt 2 ln(2).

54/13 *„ohne Rechnung"?!?*
a) wahr (einsetzen!)
b) falsch (Die Fläche von ln(2) bis e ist viel größer als die von 0 bis ln(2); erstere trägt negativ bei zum Integral, zweitere positiv, also ist F(e) insgesamt positiv.)
c) möglich, vgl. (b)
d) falsch (Die Fläche liegt unter der x-Achse, die obere Integrationsgrenze ist aber kleiner als die untere ➔ insgesamt positiv.)
e) wahr ($F' = f < 0$)
f) falsch (bei x = ln(2) ist ein TiP, vgl. (e))
g) teilweise wahr (bei x = ln(2) ist ein TiP, vgl. (e); der y-Wert ist falsch, sollte negativ sein)
h) unklar – G_f sieht eher so aus, als ob er die Exst. –0,3 hätte; –0,5 könnte aber auch stimmen
i) wahr (vgl. (b))

55/14
a) $D_F =]-1;\ \infty[$
$F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ ➔ Nullstelle $x_{1,2} = 0$ (weil auch einf. Nst. von f ➔ doppelt)
einzige Nullstelle wg. Monotonie
aus VZ von f folgt: G_F ist sms in $]-1;\ 0]$, smf in $[0;\ \infty[$ ➔ HoP bei 0
F(0) = 0 (Nullstelle, s.o.) ➔ HoP(0|0)
aus Monotonie von G_f folgt: G_F ist rechtsgekr. in $]-1;\ 1]$, linksgekr. in $[1;\ \infty[$ ➔ WeP bei 1
aus Zeichnung: F(1) = Flächeninhalt zwischen 0 und 1 $\approx -\frac{2}{3}$ ➔ WeP$(0 \mid \approx -\frac{2}{3})$

55/16
a,b) $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$; G_f ist sms in D_f; Rand-TiP$\left(0\middle|-\frac{\pi}{2}\right)$
grün: f; orange: f^{-1}, schwarz gestrichelt: Asymptote; schwarz durchgezogen: Tangente

b) G_f ist sms in D_f ➔ f ist umkehrbar; $y = 2x - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$
c) $G'(x) = \ldots = f(x)$; $F(x) = G(x) - G(0) = G(x)$; $F(1) = -\ln(2)$
d) G_F ist smf in $[0;1]$, sms in $[1;\infty[$, linksgekr. in D_F; Rand-HoP(0|0), TiP$(1|-\ln(2))$
F hat einen TiP bei 1, weil f dort einen VZW von – nach + hat. Der y-Wert des TiP gibt den (orientierten) Inhalt der Fläche an, die G_f zwischen x = 0 und x = 1 mit der x-Achse einschließt (negativ, weil unter der x-Achse).

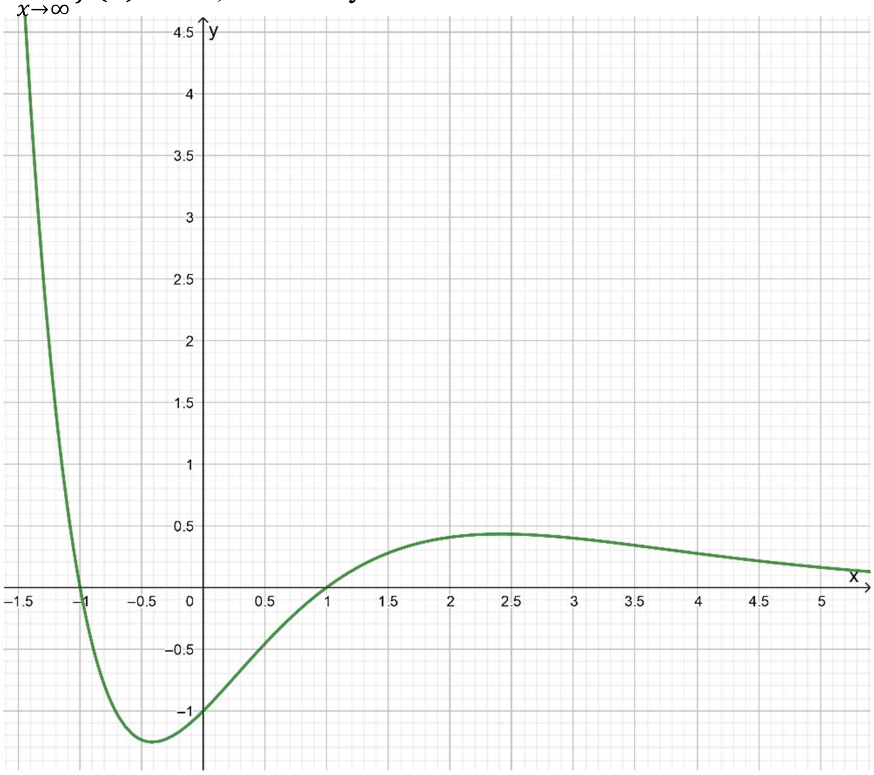
55/17

a) $x_{1,2} = \pm 1$

f'(x) = 0 ➔ $-x^2 + 2x + 1 = 0$ ➔ D = 8 > 0 ➔ zwei einfache Lösungen ➔ f hat genau zwei Exst.

G_f ist smf in $\left]-\infty; 1-\sqrt{2}\right]$ und $\left[1+\sqrt{2}; \infty\right[$, sms in $\left[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0^+$; w. As.: y = 0



c) G_u ist smf in D_u ➔ u ist umkehrbar; $y = -\frac{1}{2e}x - 1$

d) Maxst.: $x_1 = -1$; Minst.: $x_2 = 1$; Wst.: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; 2 Nst. (Monotonie, …)

e) h'(x) = … = f(x); F(x) = h(x) – h(1) = $-(x+1)^2e^{-x} + 4e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 4e^{-1}$, d. h. die unendlich breite Fläche, die G_f ab x = 1 mit der x-Achse einschließt, hat den endlichen Inhalt $4e^{-1}$.

56/18

a) $x_{1,2} = \pm 1$; G_f ist symm. zur y-Achse; w. As.: y = 2,5π

b) G_F ist sms in $]-\infty; -1]$ und $[1; \infty[$, smf in [–1; 1]; Maxst. $x_1 = -1$, Minst. $x_2 = 1$

G_F ist rechtsgekr. in $]-\infty; 0]$, linksgekr. in $[0; \infty[$; West. $x_1 = 0$

c) 3 Nst.: $x_1 = 0$; $x_{2,3} \approx \pm 1{,}8$

d) $U_6 \approx 7{,}87 < A < O_6 \approx 10{,}57$

Lösungen II.3

32/5 gelb

48/4 c) G'(x) = ... = f(x)

(a) A_{gesamt} = G(7) – G(1) = –6 + 7 ln 7 ≈ 7,62; A_{links} = G(4) – G(1) = –3 + 4 ln 4 ≈ 2,54;

A_{rechts} = G(7) – G(4) = –3 + 7 ln 7 – 4 ln 4 ≈ 5,08 ==> Verhältnis: ≈ 0,501 ≈ 1:2

(b) B = G(6) – G(3) = –3 + 6 ln 6 – 3 ln 3 ≈ 4,45

53/9

a) F(0)	g) F(4) – F(0)
b) F(1)	h) F(4) – F(3)
c) F(2)	i) F(5) – F(3)
d) F(3)	j) F(5) – F(1)
e) F(4)	k) F(10) – F(–3)
f) F(3) – F(1)	

48/1
a) $F_1(x) = -5x + 5$
b) $F_1(x) = x^2 - 5x + 4$
c) $F_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x - \frac{7}{6}$
d) $F_1(x) = x^6 - 0{,}5x^4 + 0{,}5x^2 - 1$
e) $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sin(x) - \frac{1}{3} - \sin(1)$

71/1
a) $\frac{1}{16}(4x - 3)^4 + C$
b) $\frac{1}{6}(x + 1)^6 + C$

Blatt (123/3 aus Buch Klasse 12; $C \in \mathbb{R}$)
a) $\int (x+5)dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x + C$
b) $\int 5x\, dx = \frac{5}{2}x^2 + C$
c) $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$
d) $\int (2{,}7x^2 - 6\,x)dx = 0{,}9x^3 - 3x^2 + C$
e) $\int \left(-\frac{1}{6}x^2 + 81\right)dx = -\frac{1}{18}x^3 + 81x + C$
f) $\int (3{,}5x - 4{,}8x^3)dx = 1{,}75x^2 - 1{,}2x^4 + C$
g) $\int \left(\frac{3}{2}e^{2x} - 11e^x + 3\right)dx = \frac{3}{4}e^{2x} - 11e^x + 3x + C$
h) $\int \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x\right)dx = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + C$
i) (T) $\int (-0{,}7e^{2x} - 13e^x + 3)dx = -0{,}35e^{2x} - 13e^x + 3x + C$
j) $\int (0{,}1e^{2x})dx = 0{,}05e^{2x} + C$
k) $\int (4e^{4x+4})dx = e^{4x+4} + C$
l) $\int (2x - 7 + e^{2x-7})dx = x^2 - 7x + \frac{1}{2}e^{2x-7} + C$

Lösungen II.4

53/3
a) *korrekt wäre: „den Inhalt der Fläche“* A = 23,4
b) Nullstellen und Vielfachheiten ➔ $f(x) = a\,x\,(x-4)^2$; P(6|6) einsetzen ➔ a = 0,25
c) Der Flächeninhalt ist 144 000 m², der Grundstückspreis damit 1 296 000 €.

54/10
a) Die Teilfläche von –4 bis 0 liegt unter der x-Achse, liefert also ein negatives Ergebnis, und ist größer als die Teilfläche von 0 bis 3, die über der x-Achse liegt, also ein positives Ergebnis liefert.
b) –5,335
c) $x_1 = 2$; $x_2 \approx 4$; $x_3 \approx -2$; $x_4 \approx -5{,}5$
d) 6
e) 3,525

Lösungen II.5

74
a) $0{,}5 \ln|4x - 1| + C$
b) $-2 \ln|3 - x| + C$
h) $0{,}5 \ln|2x^2 - 6x + 4| + C$
i) $\frac{2}{3} \ln|3x^2 + 3x + 1| + C$
o) $\ln|(x-3)^3 + 27| + C$
p) $\frac{1}{6} \ln|4x^3 + 3x^2 + 8| + C$

71/3

e) $0{,}5 \ln \frac{1+9e^{-4}}{1+9e^{4}} + 4 \approx 0{,}977$

f) $-\ln|1 - e^x| + C$

g) $-\ln|e^{-x} + 1| + C$

h) $\ln|e^x + e^{-x}| + C$

i) $e^x - 3\ln(e^x + 3) + C$

71/1 j) $0{,}5 \ln|x^2 + 4x - 1| + C$

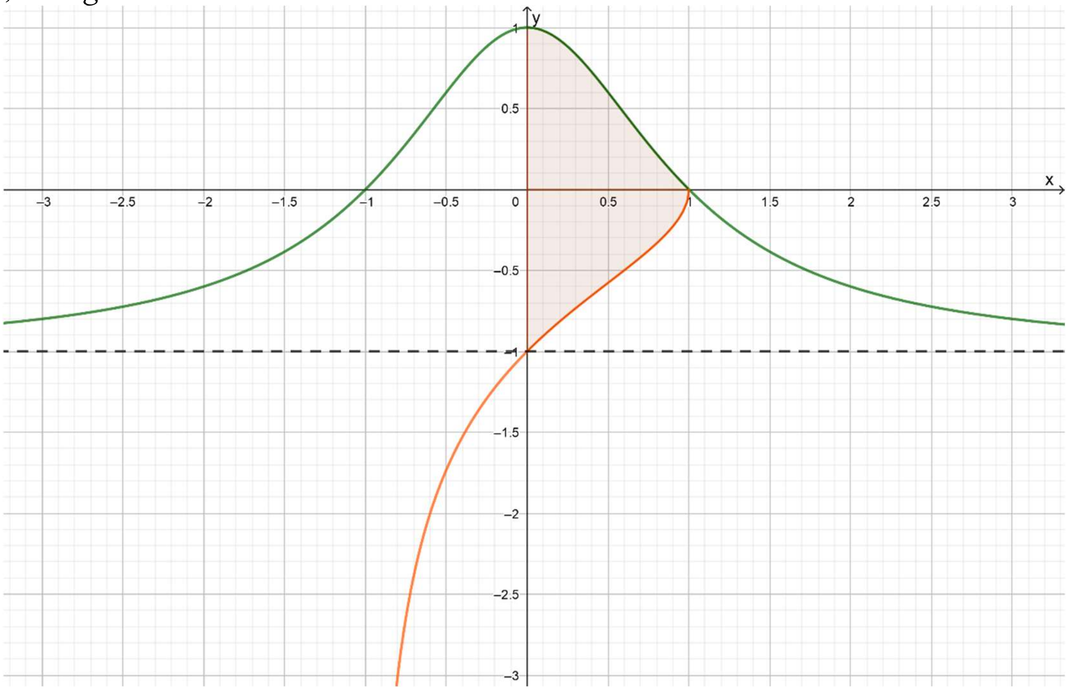
48/1 f) $F_1(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$

55/15

a) G_f ist symm. zur y-Achse; $x_{1,2} = \pm 1$; w. As.: $y = -1$

G_f ist sms in $\mathbb{R}_0^-$, smf in $\mathbb{R}_0^+$; HoP(0|1); $W_f =]-1; 1]$

b,d,e) *grün: f; orange: u^{-1}*



c) Minst.: $x_1 = -1$, Maxst.: $x_2 = 1$; WeP(0|0); 3 Nullstellen (Monotonie, Grenzverhalten, …)

d) G_u ist sms in D_u ➔ u ist umkehrbar

e) Die Fläche, die der Graph von u^{-1} im IV. Quadranten mit den Achsen einschließt, ist gleich groß wie die Fläche, die der Graph von f im II. Quadranten mit den Achsen einschließt (Symmetrie zu y = x!), und diese ist wiederum gleich groß wie die Fläche, die der Graph von f im I. Quadranten mit den Achsen einschließt. Damit ist die gesuchte Fläche insgesamt doppelt so groß wie die Fläche, die der Graph von f im I. Quadranten mit den Achsen einschließt, also:

$$A = 2 \cdot \int_0^1 f(x)dx = \cdots = \pi - 2$$

74 e) $0{,}5 \arctan(2x) + C$ l) $\frac{\sqrt{5}}{45}\arctan(\sqrt{5}x) + C$

78/20

a) $F(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\arctan(x)$

b) HoP$\left(-\frac{\sqrt{6}}{3} \approx -0{,}82 \middle| \approx 0{,}49\right)$; TiP($\approx 0{,}82| \approx -0{,}49$); WeP(0|0)

77/15 b) $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$ c) $\ln(x^2 + 4x + 13) + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$

Lösungen II.6

63
a) $-3 \ln|x-2| + 2 \ln|x-3| + C$
b) $\ln|x-1| + \ln|x-4| + C$
c) $-\frac{1}{2} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x-6| + C$
d) $-\frac{3}{4} \ln|x+2| + \frac{2}{3} \ln|x-5| + C$
e) $3 \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x-7| + C$
f) $2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-5| + C$
g) $-0{,}4 \ln|x| - \ln|x+3| + 2{,}5 \ln|x-3| + C$
h) $3 \ln|x+1| - 0{,}5 \ln|x+6| - 2 \ln|x-3| + C$
i) $x^2 - x + \ln|x-4| - 2 \ln|x-5| + C$
j) $-1{,}5x^2 + 2x - 3 \ln|x+3| + 0{,}5 \ln|x-3| + C$
k) $0{,}25x^2 - 2 \ln|x-1| + 4 \ln|x+4| + \ln|x+5| + C$
l) $0{,}125x^2 + x + 0{,}5 \ln|x+1| + 2 \ln|x-0{,}5| - 2 \ln|x-\frac{1}{3}| + C$

77/15 a) $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right| + C$

d) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

77/16 $A = 2 + \ln\left(\frac{15}{7}\right) \approx 2{,}762$

107/1 d) $4 + 2\ln(4{,}2) \approx 6{,}87$

63
m) $-2 \ln|x| + \frac{2}{x} + 3 \ln|x-1| + C$
n) $0{,}5 \ln|x^2-1| - \frac{1}{x-1} + C$
o) $-\frac{1}{27}\ln|x| + \frac{1}{9x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{28}{27}\ln|x-3| + C$

Lösungen II.7

67/1
a) $x \cdot \frac{1}{6}(x-3)^6 - \frac{1}{42}(x-3)^7 + C$
b) $\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$
d) $0{,}25x^2 - 0{,}25\, x \sin(2x) - 0{,}125 \cos(2x) + C$
i) $-\frac{\ln x}{x+1} + \ln|x| - \ln|x+1| + C$
g) $-0{,}5x + 0{,}5(1+x^2)\arctan(x) + C$

67/2 a) $0{,}25(e^2+1)$ b) $9 - 9e^6$

76/9
a) $6e^{-2} - 2$
b) $5\,147\,823{,}236\overline{1}$
c) $\frac{32}{9}e^{-3} - \frac{20}{9}e^{-1{,}5}$
d) $20e^{-2} - 10e^{-1}$
e) $-156e^{-0{,}5} + 96$
f) $-1{,}1875e^{-2} + 0{,}1875$
g) $\frac{2}{9}e^{3/2} + \frac{4}{9}$
h) $\frac{6}{25}e^{5/3} + \frac{9}{25}$
i) $-\frac{220}{9}e^{-6} + \frac{10}{9}$
j) 2π
k) $\frac{\pi^2}{4} - 2\pi - 1$

76/10

b) $-\frac{\ln(x)+1}{x}$ + C

c) $-\frac{(\ln(x))^2+2\ln(x)+2}{x}$ + C

d) $\frac{1}{3}(\ln(x))^3$ + C

67/1

e) x (ln x)^2 – 2x ln x + 2x + C

h) x ln $\frac{3x+2}{2x-1}$ + 0,5 ln |2x – 1| + $\frac{2}{3}$ ln |3x + 2| + C

67/2 d) $-\frac{2}{3}$ ln 2 + $\frac{14}{3}$ ln 14 – 4 f) a ln $\frac{64}{27}$

78/19

a) G_F ist sms in D_F, rechtsgekr. in]0; 1], linksgekr. in [1;∞[; West.: $x_1 = 1$; eine Nst.

b) F(3) ≈ U_4 ≈ 1,73

c) F(x) = $x\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + 2\arctan(x) - x - \ln(2) - \frac{\pi}{2} + 1$ ➔ F(3) ≈ 1,85

67/1

c) $-\frac{1}{4}$ e^{-2x} (sin(2x) + cos(2x)) + C

f) 0,5 e^x (sin(x) + cos(x)) + C

67/2 c) $\frac{2}{3}$ e) 2

76/6

1. Zeile: richtig, Wahl von u und v‘ am Schluss ist dann aber nicht sinnvoll
2. Zeile: beide – falsch, das zweite e^{-x} sollte – e^{-x} sein
3. Zeile: rechte Seite ist –2 sin(x) e^{-x}

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\, e^{-x} dx &= \sin(x)\,(-e^{-x}) - \int \cos(x)\,(-e^{-x}) dx \\ &= -\sin(x)\, e^{-x} + \int \cos(x)\, e^{-x} dx \\ &= -\sin(x)\, e^{-x} + \cos(x)\,(-e^{-x}) - \int(-\sin(x))(-e^{-x}) dx \\ &= -(\sin(x) + \cos\,(x)) e^{-x} - \int \sin(x)\, e^{-x} dx\end{aligned}$$

➔ $2\int \sin(x)\, e^{-x} dx = -(\sin(x) + \cos\,(x)) e^{-x}$

➔ $\int \sin(x)\, e^{-x} dx = -\frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)) e^{-x} + C$

76/9 l) $\frac{1}{2}\ (1 - e^{-2\pi})$

76/8

- Formel für Mittelwert mittels Integral raussuchen
- Formel für P_{el} raussuchen
- U(t), I(t) einsetzen
- $\sin^2(x)$ = 0,5 (1 – cos(2x)) auf FS verwenden
- Standardintegrale ausrechnen
- Grenzen einsetzen, dabei ωT = 2π und sin(0) = sin(4π) = 0 verwenden
- Formeln für U_{eff}, I_{eff} einsetzen

andere Methode:

$\int_0^T (\sin(\omega t))^2 dt = \left[-\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]_0^T + \int_0^T (\cos(\omega t))^2 dt$ (partiell integriert)

$= \left[-\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]_0^T + \int_0^T (1-(\sin(\omega t))^2) dt$ (trig. Pythagoras)

➔ $2\int_0^T (\sin(\omega t))^2 dt = \left[-\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t) + t\right]_0^T$

(zweites Integral aufgeteilt, 1 aufgeleitet, $\sin^2$ nach links)

➔ $\int_0^T (\sin(\omega t))^2 dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t) + t\right]_0^T = \frac{1}{2}T$

Lösungen II.8

71/1

a) $\frac{1}{16}(4x-3)^4 + C$

b) $\frac{1}{6}(x+1)^6 + C$

c) $\frac{1}{5}(x^2-4)^5 + C$

d) $-\frac{1}{36}(-2x^3+7)^6 + C$

e) $\frac{1}{80}(4x^4-5)^5 + C$

i) $\frac{1}{x^2+1} + C$

j) $0{,}5 \ln|x^2+4x-1| + C$

k) $0{,}5 \sin(x^2) + C$

l) $\frac{1}{3}(\sin x)^3 + C$

n) $\frac{3}{16}$

71/2

a) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C$ b) $-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$ c) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$

71/3

a) $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)$

b) $\frac{1}{3}(x+3)\sqrt{2x-3} + C$

c) $-\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x} + C$

d) $\arctan\sqrt{x^2-1} + C$

e) $0{,}5 \ln\frac{1+9e^{-4}}{1+9e^{4}} + 4 \approx 0{,}977$

f) $-\ln|1-e^x| + C$

g) $-\ln|e^{-x}+1| + C$

h) $\ln|e^x + e^{-x}| + C$

i) $e^x - 3\ln(e^x+3) + C$

76/11

a) $-2e^{-3} + 2e$

b) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^3$

c) $-\frac{1}{3}e^{-2} + \frac{1}{3}e^{-1}$

d) $e^4 - e^2$

e) $(e^2+1)\ln(e^2+1) - e^2$

f) $-\frac{1}{6}$

g) $\frac{4}{3}$

h) $\frac{2}{27}\left(35^{3/2} - 27\right)$

i) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

j) $-0{,}5 \ln(2) + 0{,}5 + \cos(1)\ln(\cos(1)) - \cos(1)$

k) $\ln(3)$

l) $\ln\frac{2+\sin(2)}{1+\sin(1)}$

77/12 $z = 4 - x^2$ ➔ $x\,dx = -\frac{1}{2}dz$

a) $\int x\sqrt{4-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\sqrt{z}\,dz = -\frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

➔ $\int_1^2 x\sqrt{4-x^2}dx = -\frac{1}{3}\left[(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = 0 + \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}$

b) $\int_1^2 x\sqrt{4-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_3^0\sqrt{z}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{z}\,dz = \left[\frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}} - 0 = \sqrt{3}$

71/1 m) $\frac{1}{4}$ o) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

Spezialfall bei gebrochenrationalen Funktionen:

71/1

f) $-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{4}{3(x+2)^3}+C$

g) $\frac{2}{(2-x)^2}-\frac{4}{2-x}-\ln|2-x|+C$

h) $\frac{8}{3(2-x)^3}-\frac{6}{(2-x)^2}+\frac{6}{2-x}+\ln|2-x|+C$

77/14

a) $7\ln(3)$

b) $6\ln(4)$

c) $0{,}5\ln(2)$

d) $\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\ln(3)$

e) $2+6\ln(3)$

f) $1+4\ln(2)$

g) $28+3\ln(5)$

h) $-\frac{8}{3}+6\ln(3)$

i) $17{,}5-6\ln(6)$

j) $6+\frac{1}{3}\ln(4)$

gemischt:

74

a) $0{,}5\ln|4x-1|+C$

b) $-2\ln|3-x|+C$

c) $3\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+C$

d) $\frac{1}{9}\left(\ln|3x-5|+\frac{1}{3x-5}\right)+C$

e) $0{,}5\arctan(2x)+C$

f) $0{,}25\ln\left|\frac{x+4}{x+8}\right|+C$

g) $-\frac{1}{2x+12}+C$

h) $0{,}5\ln|2x^2-6x+4|+C$

i) $\frac{2}{3}\ln|3x^2+3x+1|+C$

j) $-\frac{1}{4}\left(\ln|2x-1|+\frac{11}{2x-1}\right)+C$

k) $-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C$

l) $\frac{1}{9\sqrt{5}}\arctan(\sqrt{5}x)+C$

m) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-4{,}5}{x-1{,}5}\right|+C$

n) $\frac{1}{12}\arctan\frac{3x+1}{4}+C$

o) $\ln|(x-3)^3+27|+C$

p) $\frac{1}{6}\ln|4x^3+3x^2+8|+C$

q) $\frac{1}{4}\left(-\frac{5}{2x+5}+\frac{21}{2(2x+5)^2}\right)+C$

75/1

a) $-1{,}5\ln|1-2x|+C$

b) $-2\ln|x+3|-\frac{12}{x+3}+C$

c) $\frac{1}{5}\arctan\frac{4}{5}x+C$

d) $\frac{1}{5}\arctan\frac{x-4}{5}+C$

e) $-\frac{1}{32}\ln|(8x-2)^2+1|+C$

f) $\frac{1}{9}\left(\ln|3x-2|-\frac{8}{3x-2}\right)+C$

g) $\frac{1}{16}\arctan(x-1{,}5)+C$

h) $\frac{1}{3x-12}+C$

i) $\frac{1}{2}\ln|4x^4+3x^2-5|+C$

j) $\frac{1}{8}\left(2\ln|2x+5|-\frac{30}{2x+5}-\frac{52}{(2x+5)^2}\right)+C$

k) $\frac{1}{ac}\arctan\frac{ax+b}{c}+C$

l) $-\arctan(2x+10)+C$

75/2

a) $0{,}25\ln((2x-2)^2+1)+1{,}5\arctan(2x-2)+C$

b) $-\frac{1}{12}\ln((6x+12)^2+1)+\frac{7}{3}\arctan(6x+12)+C$

c) $-2\ln|x-7|+\frac{25}{2x-14}+C$

d) $\frac{1}{6}\ln((6x-3)^2+4)+\frac{5}{6}\arctan(3x-1{,}5)+C$

e) $-\frac{6}{7}\ln|x-2|+\frac{5}{7x-14}+C$

f) $\frac{1}{8}\ln((2x-\frac{4}{3})^2+1)+\frac{1}{6}\arctan(2x-\frac{4}{3})+C$

<u>gemischte Übungen zu allen Verfahren:</u>

75/4

a) $4\ln(3)$

b) $\ln(2)$

c) $= 67/2a$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{\pi^2}{32}$

f) $\frac{14}{3}-\pi$

j) $3{,}5+0{,}5\ln(1{,}5)$

k) $2{,}5\ln(1{,}4)$

l) $\frac{\pi}{2}-1$

m) $\frac{1}{2}e^{\pi/2}+\frac{1}{2}$

n) $\ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}$

o) $3{,}6\sqrt{3}+1{,}5+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

s) $\ln|x-3|+\frac{3}{x-3}+C$

t) $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)-\arctan(x+2)+C$

u) $x\ln(x)+(x+2)\ln(x+2)-2x+C$

v) $4\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+7|+C$

w) $\ln|x+1|-2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$

x) $x^2+x+\frac{4}{3}\ln|x-3|+\frac{3}{4}\ln|x-4|+C$

g) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)+C$
h) $2e^{\sqrt{x}}-\ln|\cos(x)+x^2|+C$
i) x arctan(x) – 0,5 ln(1 + x^2) + C

p) $-\frac{\sqrt{6}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)+C$
q) –ln|1 + e^{-x}| + C
r) sin(ln|x|) + C

y) $\frac{1}{4}x^2 - x - 3\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$
z) $\ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right) - \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} + C$

76/5 a) gelb b) grün c) gelb d) rot, evtl. gelb e) grün f) gelb

76/7 Keine allgemeine Lösung angebbar; machen Sie mal.

77/13
a) *gemeint ist wohl –e^{-x} + 1, ansonsten wäre das unlösbar!* damit: $\frac{2}{3}\left((2+e^{-2})^{3/2}-(1+e^{-1})^{3/2}\right)$
b) $(e+e^{-e})(\ln(e+e^{-e})-1)-(1+e^{-1})(\ln(1+e^{-1})-1)$
c) $e-\sqrt{e}$
d) $\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$
e) –ln(cos(1))
f) $\frac{1}{2}e^{\pi/2}-\frac{1}{2}$
g) e – 1
h) 0
i) $\ln\frac{1+\cos(2)}{2}$
j) $\frac{1}{2}\ln(3)$
k) 2 (e – $e^{1/4}$)
l) $\frac{21}{25}e^{10/3}+\frac{9}{25}$
m) $\frac{\pi}{2}$
n) tan(1) – 1
o) = (e)!
p) $\frac{1}{2}\ln(2)$
q) $\sqrt{2}-1$

<u>Lösungen II.9</u>

52/1 a) 1 b) –1 c) $8\sqrt{2}$ d) $12\sqrt[3]{6}$ e) $20\sqrt[5]{2}$ f) 0,5 g) 2 h) 1

52/2
a) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-2;0\}$; $x_1 = 2$; w. As.: y = 0; s. As.: x = 0, x = –2
$\text{TiP}\left(2-2\sqrt{2}\approx-0{,}83\middle|1{,}5+\sqrt{2}\approx2{,}91\right)$; $\text{HoP}\left(2+2\sqrt{2}\approx4{,}83\middle|1{,}5-\sqrt{2}\approx0{,}09\right)$
b) existiert nicht

52/3

a) $$\int_a^\infty \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-k+1}\frac{1}{x^{k-1}}\right]_a^b & \text{für } k<1 \\ \lim\limits_{b\to\infty}[\ln|x|]_a^b & \text{für } k=1 \\ \lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-k+1}\frac{1}{x^{k-1}}\right]_a^b & \text{für } k>1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \text{für } k<1 \\ \infty & \text{für } k=1 \\ \frac{a^{1-k}}{k-1} & \text{für } k>1 \end{cases}$$

b) $$\int_0^b \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{a\to0^+}\left[\frac{1}{-k+1}\frac{1}{x^{k-1}}\right]_a^b & \text{für } k<1 \\ \lim\limits_{a\to0^+}[\ln|x|]_a^b & \text{für } k=1 \\ \lim\limits_{a\to0^+}\left[\frac{1}{-k+1}\frac{1}{x^{k-1}}\right]_a^b & \text{für } k>1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{b^{1-k}}{1-k} & \text{für } k<1 \\ \infty & \text{für } k=1 \\ \infty & \text{für } k>1 \end{cases}$$

52/4
a) siehe 3(b) !
b) $e^x > 1$ für x ∈]0; 1], da $e^0 = 1$ ist und e^x streng monoton zunimmt ➔ $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{x}$
➔ $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx > \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ➔ divergiert (vgl. (a) bzw. 3(b) !)

c) f(x) := ln(x) – x + 1 ➔ f(1) = 0 und f '(x) = $\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ < 0 für x > 1

➔ f ist streng monoton abnehmend für x > 1 ➔ f(x) < 0 für x > 1
➔ ln(x) – x + 1 < 0 ➔ ln(x) + 1 < x ➔ Behauptung
➔ $\int_1^\infty \frac{1}{1+\ln x}\,dx > \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ➔ divergiert (vgl. 3(a) !)
d) $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ ➔ Polstellen 1. Ordnung $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ ➔ Integral divergiert jeweils bei 1 und bei 2 (vgl. (a) und 3(b)); wer's nicht sieht, betrachtet die beiden Summanden einzeln und substituiert noch z = x – 2 bzw. z = x – 1 (oder berechnet gleich F)
für |x| → ∞ konvergiert das Integral dagegen, da F(x) = ln $\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$ → 0 !
(Anmerkung: Der Graph ist symmetrisch zu x = 1,5, es genügt also eigentlich sogar, wenn man nur eine Hälfte, also nur eine der beiden Polstellen, betrachtet.)

56/19

a) 1	g) 2π
b) 0,25	h) –
c) 1	i) 12
d) π/4	j) 2,5
e) π	k) –
f) –0,375	l) 2

56/20 a) 2 b) – c) 10 d) –

75/3
a) –1
b) divergiert:
(1) für x → ∞ ist der Nenner ≈ x^2, und das Integral über $x/x^2 = 1/x$ ergibt ln x, was für x → ∞ divergiert
(2) oder umständlich: zunächst z = x^2 substituieren ….. ➔ (mit FS) = $\left[\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|\right]_0^\infty = \infty$
c) zweimalige partielle Integration ➔ ... = 0,5
d) partielle Integration ➔ ... = 1/9
e) u = $\sqrt{x-1}$ substituieren ➔ ... = π
f) divergiert (Stammfunktion: –2 ln|cos(x)|)
g) $\sqrt{2}$ – 1
h) unter der Wurzel quadratisch ergänzen, u = 2x–1 substituieren ➔ ... irgendwas mit arcsin; ***nicht im Lehrplan! prinzipiell aber machbar…***

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \cdots = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\,dx$$

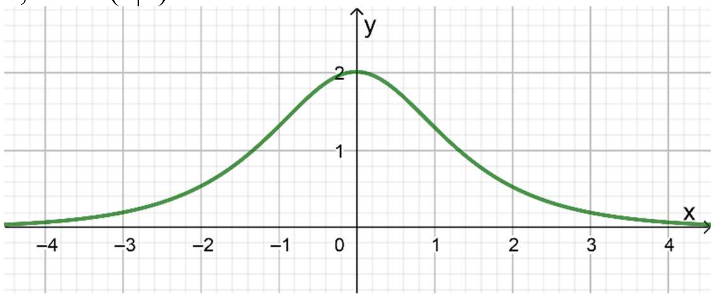
Substitution: 2x – 1 = sin(z); dabei Grenzen auch umrechnen! dx = $\frac{\cos(z)}{2}\,dz$

➔ $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz = \pi$

i) divergiert:
(1) für |x| → ∞ ist der Nenner ≈ $4x^2$, und das Integral über $x/4x^2$ = 1/4x ergibt 0,25 ln |x|, was für |x| → ∞ divergiert
(2) oder: ... = $\left[0{,}125\ \ln\left|x^2+\frac{9}{4}\right|\right]_{-\infty}^{\infty} = \infty - \infty$ nicht definiert!

77/17

a) G_f ist symm. zur y-Achse; HoP(0|2)



b) WeP(0|0)

c) $F(x) = 4\arctan(e^x) - \pi$ ➔ $A = \pi$

78/18 1

78/21

a) G_F ist smf in $]-\infty; -2]$, sms in $[-2;0[$, linksgekr. in $]-\infty; 0[$; TiP(–2|0)

b) $F(x) = x\ln\left(\frac{x^2+4}{2x^2}\right) + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \pi$

c) t: $y = 0{,}5x + 1$ ➔ $A = \int_{-2}^{0}(f(x) - t(x))dx = \cdots = \pi - 1$

Lösungen II.10

87/1

a) 16π

b) $1{,}44\pi$

c) $13{,}44\pi$

d) $48{,}4\pi$

e) $7{,}5\pi$

f) $\frac{32}{3}\pi$

87/2

a) $0{,}75\pi$

b) $\frac{511}{24}\pi$

c) $\ln(9)\cdot\pi$

d) $2\pi\,(e^4 - e^{-4})$

e) $\pi\,(e^4 - 1)$

87/3

a) x-Achse = Symmetrieachse des Fasses, y-Achse an der Stelle der größten Ausbuchtung, x und y in dm
➔ $f(x) = -0{,}025x^2 + 3{,}2$

b) $V = 75{,}94\overline{6}\pi \approx 239$ (Liter)

c) $V = 62{,}72\pi \approx 197$ (Liter)
Sinnvoller wäre ein Vergleich mit einem Zylinder, dessen Radius der Mittelwert des größten und des kleinsten Fassradius‘ ist! Dafür: $V = 72\pi \approx 226$ (Liter)

87/4 $\pi^2/2$

87/6 12π

88/12

a) $f(x) = r_2 + \frac{r_1 - r_2}{h}x$; $D = [0; h]$; $V = \ldots = \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$

b) $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; $D = [-a; a]$; $V = \ldots = \frac{4}{3}\pi a b^2$

88/13 $\approx 117{,}5$

Drehkörper mit Loch:
88/8 *Zumutung!*
a) $665{,}6\pi \approx 2091$
b) ***???***

88/9 $\pi \cdot \left(\ln\left(\frac{3}{7}\right) + \frac{476}{27}\right) \approx 52{,}7$

88/10
mit angegebener Gleichung: $P\left(\sqrt{R^2 - r^2}\middle| r\right)$
$V = \pi \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \left(\sqrt{R^2 - x^2}^2 - r^2\right) dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} (R^2 - r^2 - x^2) dx$ (Symmetrie!)
$= 2\pi \left[(R^2 - r^2)x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{R^2-r^2}} = 2\pi \left[x\left(R^2 - r^2 - \frac{1}{3}x^2\right)\right]_0^{\sqrt{R^2-r^2}}$
$= 2\pi \left[\sqrt{R^2 - r^2}\left(R^2 - r^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)\right) - 0\right] = 2\pi\sqrt{R^2 - r^2} \cdot \frac{2}{3} (R^2 - r^2) = \frac{4}{3}\pi (R^2 - r^2)^{1,5}$

Drehkörper um die y-Achse:
87/5 $c = 6$

87/7 $\approx 1\,121\,000\ m^3$ *Zumutung!*

88/11
a) 36π
b) 9π
c) 60π
d) 9π
e) 18π

zu 88/12b: Rotation um y-Achse ➔ $f^{-1}(x) = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}$; $D = [-b; b]$; $V = \ldots = \frac{4}{3}\pi a^2 b$