Lösungen 0.1

c) Gleichungen lösen

Quadratische Gleichungen: (Buch 11. Klasse)

98/1 a) $x_{1,2} = \pm 1{,}3$ b) $x_{1,2} = \pm 3{,}5$ c) $x_{1,2} = \pm k$ d) $x_{1,2} = \pm 2{,}5$ e) $x_{1,2} = 2a \pm 2$ f) $x_{1,2} = t$

98/2 a) $x_1 = 3; x_2 = -4$ b) $x_1 = 3; x_2 = -2$ c) $x_1 = \frac{8+\sqrt{56}}{2} = 4 + \sqrt{14}$; $x_2 = 4 - \sqrt{14}$

d) $x_1 = -a; x_2 = -2a$ e) $x_1 = 1; x_2 = -10$ f) $x_1 = \frac{-7+\sqrt{97}}{2}$; $x_2 = \frac{-7-\sqrt{97}}{2}$

g) $x_1 = 7; x_2 = 5$ h) $x_1 = \frac{1}{k}; x_2 = -k$ i) $x_1 = 2; x_2 = 1{,}25$ k) $x_{1,2} = t$

98/3

a) $x_1 = 1{,}5; x_2 = -3$ b) $x_1 = 0{,}5; x_2 = 0{,}25$ c) $x_1 = -9; x_2 = 7$ d) $x_{1,2} = 3$

e) $x_1 = 2; x_2 = 1$ f) $x_1 = 6; x_2 = -7\frac{1}{3}$ g) $x_1 = 1{,}82; x_2 = -1{,}9$ h) $x_1 = -1; x_2 = \frac{22}{15}$

i) $x_{1,2} = -1$ k) $x_1 = 6; x_2 = 2$ l) keine Lösung m) $x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{3}$

98/4 a) $x_1 = 0; x_2 = 0{,}9$ b) $x_1 = 0; x_2 = -\frac{5}{6}$ c) $x_1 = 0; x_2 = -a$ d) $x_1 = 0; x_2 = 1{,}5$

e) $x_1 = 0; x_2 = -0{,}8$ f) $x_1 = 0; x_2 = \frac{1+m^2}{1-m^2}$

98/5 $x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Betragsgleichungen: (Buch Klasse 11)

157/2 a) $\mathbb{L} = \{\frac{11}{3}; -\frac{13}{3}\}$ b) $\mathbb{L} = \{3\}$ c) $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{7}\}$ d) $\mathbb{L} = \{\}$

Algebraische Gleichungen (faktorisieren, Substitution ...): (Buch Klasse 11)

129/1 a) $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -2$ alle einfach c) $x_{1,2} = 2; x_{3,4} = -2$ beide doppelt

d) $x_{1,2} = 0$ doppelt; $x_2 = 1; x_3 = -1$ beide einfach e) $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 8$ alle einfach

f) $x_{1,2,3} = 0$ dreifach; $x_4 = \frac{3}{32}$ einfach g) $x_1 = 0$ einfach; $x_{2,3} = \sqrt{2}$; $x_{4,5} = -\sqrt{2}$ beide doppelt

h) $x_1 = 0$ einfach; keine weiteren Lösungen i) $x_1 = 2; x_2 = -2$ beide einfach

k) $x_{1,2,3} = 0$ dreifach; $x_{4,5} = -4 \pm 2\sqrt{7}$ beide einfach

Gleichungen mit Polynomdivision: (Buch 11. Klasse)

131/1 a) $x_1 = 1$ einfach; $(x^3 - 2x^2 + 2x - 1):(x - 1) = x^2 - x + 1$; keinen weiteren Lösungen

b) $x_1 = 2$; $(-x^3 - 3x^2 + 4x + 12):(x - 2) = -x^2 - 5x - 6$; $x_2 = -2$; $x_3 = -3$ alle einfach

c) $x_1 = 3$ einfach; $(x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9):(x - 3) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$; $x_2 = -3$ einfach;
$(x^3 + 4x^2 + 4x + 3):(x + 3) = x^2 + x + 1$; keine weiteren Lösungen

d) $x_1 = 4$; $(-6x^3 + 23x^2 + 6x - 8):(x - 4) = -6x^2 - x + 2$; $x_2 = -\frac{2}{3}$; $x_3 = \frac{1}{2}$ alle einfach

e) $x_1 = 1$; $(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24):(x - 1) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$; $x_2 = -2$;
$(x^3 + 3x^2 - 10x - 24):(x + 2) = x^2 + x - 12$; $x_3 = 3$; $x_4 = -4$ alle einfach

Bruchgleichungen: (Buch 12. Klasse)

45/1 a) 3 b) – c) 2; –1,25 d) 1; 4 e) 0,6 f) 0,25 g) 10 h) 24

Goniometrische Gleichungen: (Buch 12. Klasse)

35/1 a) $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$ b) $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$; $\frac{1}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$ c) $\frac{1}{6}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$

d) 0; 2π; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$ e) $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$ f) $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$

36/2 a) $\frac{1}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$ b) 0,5π; π (Probe nötig!) c) $\frac{1}{6}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$

d) 0; ≈2,4981 (Probe nötig!) e) $\frac{1}{3}\pi$ (Probe nötig!) f) 0; π; $-\frac{1}{4}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$

36/3

a) $\frac{1}{6}\pi$ b) $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$ c) $\frac{7}{12}\pi$; $\frac{11}{12}\pi$; $-\frac{1}{12}\pi$; $-\frac{5}{12}\pi$ d) $\pm\frac{1}{3}\pi$; $\pm\frac{2}{3}\pi$

e) $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{7}{2}\pi$ f) 0; π; 2π; $\frac{1}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$ g) $\frac{1}{6}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$; $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$

h) 0; π; 2π i) $-\frac{\pi}{2}$ k) 0

natürliche Exponential- und Logarithmusgleichungen: (von einem Übungsblatt)

6) a) $x = \frac{\ln 2}{3}$ b) x = 0 c) x = –2 ln 3 d) $x = \frac{\ln 4 + 1}{2}$ e) x = 1 + ln 2 f) $x = -2 \ln\frac{2}{3}$

g) $x = \frac{1-\ln\frac{2}{3}}{0,4}$ = 2,5 (1 – ln 2 + ln 3) h) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\ln 3}$

7) a) x = 0 b) x = –ln 2 c) x = 0 d) $x = -\frac{\ln 2}{3}$ e) x_1 = ln 2; x_2 = ln 3

f) x_1 = –ln 2; keine weitere Lösung g) x_1 = ln 3; keine weitere Lsg. h) x_1 = ln 2; x_2 = ln 3

8) a) $x = \frac{e}{2}$ b) $x = \frac{1}{3e}$ c) $x = \frac{2}{\sqrt{e}}$ d) $x = \sqrt{e}$ e) x = 2 f) x = 0 g) $x_{1,2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{e^2}}$

h) x = 2

9) a) 29,96 b) 0,08 c) 3,12 d) 1,00 e) 0,50 f) 2,04 g) 1,56 h) –3,22 i) 3,00
j) 1,51 k) –0,58 l) 1,31

d) Ungleichungen lösen

Quadratische Ungleichungen: (Buch 11. Klasse)

107/1 a) $\mathbf{L} =]-\infty;-4] \cup [2;\infty[$ b) $\mathbf{L} =]-\infty;-3[\cup]0,625;\infty[$ c) $\mathbf{L} =]-\infty;2[\cup]5;\infty[$

d) $\mathbf{L} = [-6;2]$ e) $\mathbf{L} =]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup]2;\infty[$ f) $\mathbf{L} =]-\infty;-6,25[\cup]25;\infty[$

g) $\mathbf{L} =]-0,5;0[$ h) $\mathbf{L} =]-3;0[$

107/2 a) $\mathbf{L} =]-\infty;2[\cup]12;\infty[$ b) $\mathbf{L} =]-\infty;\frac{-3-\sqrt{89}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{89}}{2};\infty[$

c) $\mathbf{L} =]-\infty;\frac{1}{3}[\cup]6;\infty[$ d) $\mathbf{L} =]-\infty;0,25] \cup [1,75;\infty[$ e) $\mathbf{L} =]0;0,2[$ f) $\mathbf{L} = [-15;-5]$

einfache Betragsungleichungen (Umgebungen): (Buch 11. Klasse)
159/2 a)]3;5[b)]–1;3[c)]–15;5[d)]235;265[e)]–740;–700[f)]0,245;0,255[

Bruchungleichungen: (Buch 12. Klasse)
45/2 a)]–4;1[b)]–3;1[c) $]-\infty;-2[\cup[6;\infty[$ d)]–4;–3] e) $]-\infty;1]\cup]3;\infty[$
f)]–8;–2,5[g)]0,30;1,5] h) $[0,6;\infty[$ i) $[40;\infty[$ k)]0;200]

e) Definitionsmengen bestimmen
2006-AII $D = \mathbb{R}$
2007-AI $(a > 0)$ $D =]-\infty;0[\cup]2a;\infty[$
2007-AII $a \geq 0$: $D = \mathbb{R}$; $a < 0$: $D = \mathbb{R}\backslash\{\ln\sqrt{-a}\}$
2008-AII $D = \mathbb{R}$
2010-AI $(a > 0)$ $D =]-\sqrt{a};0[\cup]0;\sqrt{a}[$
2010-AII $(a \neq 0)$ $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
2011-AI $D = \mathbb{R}$
2011-AII $(a > 0)$ $D = \mathbb{R}^+$
2012-AII $a > 0$: $D = \mathbb{R}$; $a = 0$: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $a < 0$: $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}\right\}$
2013-AI $(a > 0)$ $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
2013-AII bei beiden: $D = \mathbb{R}$
2014-AII $D = \mathbb{R}$
2015-AI $a \geq 0$: $D = \mathbb{R}$; $a < 0$: $D = \mathbb{R}\backslash\{\ln\sqrt{-a}\}$ bzw. $D = \mathbb{R}$
2015-AII $D = \mathbb{R}$
2016-AI $(a > 0)$ $D =]-\infty;a[\backslash\{0\}$
2016-AII $D = \mathbb{R}\backslash\{-1;3\}$ bzw. $D = \mathbb{R}$
2017-AI $D = \mathbb{R}$
2017-AII $(a > 0)$ $D = \mathbb{R}^+\backslash\left\{\frac{e}{a}\right\}$
2018-AI $(a > 0)$ $D = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{a}\right\}$ bzw. $D = \mathbb{R}^+$
2018-AII bei beiden: $D = \mathbb{R}$

Lösungen 0.2

a) Wiederholung

113/1
a) D symmetrisch zu 0 und $f_1(-x) = ... = -f_1(x)$

b) D symmetrisch zu 0 und $f_2(-x) = ... = f_2(x)$
c) D symmetrisch zu 0 und $f_3(-x) = ... = -f_3(x)$
d) D symmetrisch zu 0 und $f_4(-x) = ... = f_4(x)$
e) D symmetrisch zu 0 und $f_5(-x) = ... = f_5(x)$

113/2
a) D symmetrisch zu 0 und $g_1(-x) = ... = g_1(x)$ ==> G_{g1} ist symmetrisch zur y-Achse
b) keine Symmetrie (offensichtlich keine zum KS; außerdem ist $x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ die einzige Nullstelle, und G_{g2} ist weder symmetrisch zu $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ noch zu $P(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid 0)$)
c) D symmetrisch zu 0 und $g_3(-x) = ... = -g_3(x)$ ==> G_{g3} ist symmetrisch zum Ursprung

d) $g_4(x) = ... = x^2 - 3x$
Dies beschreibt eine Parabel mit Scheitel bei $x_s = 1,5$. Zu erwarten ist also: G_{g4} ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 1,5$. Da aber $D = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ nicht symmetrisch zur 1,5 ist, hat der Graph keine Symmetrie.
e) $g_5(x) = ... = x$.
Dies beschreibt die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten. Diese ist eigentlich symmetrisch zu *jedem* Punkt, der auf ihr liegt. $D = \mathbb{R}\setminus\{-3; 3\}$ ist aber nur symmetrisch zu 0; deshalb ist der Graph nur symmetrisch zum Ursprung.

b) Symmetrie zu beliebigen senkrechten Geraden
113/1
f) $f_6(-1 + x) = ... = f_6(-1 - x)$ und D symmetrisch zu -1
j) günstig: erst Funktionsterm vereinfachen! $f_{10}(x) = |a|\ |x+1|\ |x+a|$
$f_{10}(-\frac{1}{2}(a+1) + x) = ... = f_{10}(-\frac{1}{2}(a+1) - x)$ und D symmetrisch zu $-\frac{1}{2}(a+1)$

113/2
d) $g_4(1,5 + x) = ... = g_4(1,5 - x)$; aber: siehe oben: keine Symmetrie!
f) $g_5(a + x) = ... = g_5(a - x)$ und D symmetrisch zu a ==> G_{g6} ist symmetrisch zu $x = a$

c) Symmetrie zu beliebigen Punkten

113/1
h) $\frac{1}{2}(f_8(-1 + x) + f_8(-1 - x)) = ... = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+e^x}+\frac{2}{1+e^{-x}}\right) = ...\ 1$ und D symmetrisch zu -1
i) günstig: erst Funktionsterm vereinfachen! $f_9(x) = \frac{x-1}{|(x-1)^2-a^2|}$
$\frac{1}{2}(f_9(1 + x) + f_9(1 - x)) = ... = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x^2-a^2|} + \frac{-x}{|(-x)^2-a^2|}\right) = ... = -1$ und D symmetrisch zu 1

Lösungen 0.3

a) Grenzwert

2006-AII:
a > 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0^+$; $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$
a = 0: $\lim_{x\to\infty} f_0(x) = \lim_{x\to-\infty} f_0(x) = \infty$
a < 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0^+$

2007-AI:
a > 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0^+$; $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0^-$
$\lim_{x\to 0^-} f_a(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2a^+} f_a(x) = \infty$
(a = 0: $f_0(x) = 0$ für $x \neq 0$
a < 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0^-$; $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0^+$
$\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2a^-} f_a(x) = \infty$)

2007-AII:
a > 0: $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0^+$; $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 4^-$
a = 0: $f_0(x) = 4$
a < 0: $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0^-$; $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 4^+$;
$\lim_{x\to\ln\sqrt{-a}^+} f_a(x) = \infty$; $\lim_{x\to\ln\sqrt{-a}^-} f_a(x) = -\infty$

2008-AII:
a > 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0^+$; $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0^-$
a = 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0^+$
a < 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0^-$; $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0^+$

2010-AI: nur a > 0 möglich
$\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = \lim_{x\to 0^-} f_a(x) = -\infty$; $\lim_{x\to\sqrt{a}^+} f_a(x) = \lim_{x\to\sqrt{a}^-} f_a(x) = \infty$

2010-AII: a = 0 nicht möglich
a > 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \frac{1}{a}^-$;
$\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = \lim_{x\to 0^-} f_a(x) = -\infty$
a < 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \frac{1}{a}^+$;
$\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = \lim_{x\to 0^-} f_a(x) = \infty$

2011-AI:
a > 0: $\lim_{x\to\infty} g_a(x) = -1^+$; $\lim_{x\to-\infty} g_a(x) = -\infty$
a = 0: $g_0(x) = -1$
a < 0: $\lim_{x\to\infty} g_a(x) = -1^-$; $\lim_{x\to-\infty} g_a(x) = -\infty$

2011-AII: nur a≠0 möglich
a > 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$; $\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = \infty$
(a < 0: $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$; $\lim_{x\to 0^-} f_a(x) = \infty$)

2012-AII:
a > 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \frac{a}{2}^-$
a = 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0^-$; $\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = \lim_{x\to 0^-} f_a(x) = -\infty$
a < 0: $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \frac{a}{2}^-$;

$\lim_{x \to \sqrt{-a/3}^+} f_a(x) = -\infty$; $\lim_{x \to \sqrt{-a/3}^-} f_a(x) = \infty$;
$\lim_{x \to -\sqrt{-a/3}^+} f_a(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\sqrt{-a/3}^-} f_a(x) = -\infty$

2013-AI: nur $a > 0$ möglich
$\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} f_a(x) = -\ln a^+$; $\lim_{x \to 0^+} f_a(x) = \lim_{x \to 0^-} f_a(x) = \infty$

2013-AII:
$a > 0$: $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = 0^+$; $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \infty$
$a = 0$: $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \infty$
$a < 0$: $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = 0^+$

2014-AII:
$a > 1$: $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = 0^+$; $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = 0^+$
$a = 1$: $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = 4^-$; $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = 0^+$
$a < 1$: $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = 0^+$

2015-AI:
$a > 0$: $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = 0^+$; $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = 0^+$
$a = 0$: $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = 0^+$; $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \infty$
$a < 0$: $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = 0^+$; $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = 0^-$;
$\lim_{x \to \ln\sqrt{-a}^+} f_a(x) = \infty$; $\lim_{x \to \ln\sqrt{-a}^-} f_a(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} k(x) = \lim_{x \to -\infty} k(x) = -\infty$

2015-AII: $\lim_{x \to \infty} k(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} k(x) = 0^-$

b) Ableitung

2006-AII: $f_a'(x) = (-a\, x^2 + 2\,(a + 1)\, x - 2) \cdot e^{a \cdot (3 - x)}$;
$f_a''(x) = (a^2\, x^2 - 2\, a\, (a + 2)\, x + 2\,(2a + 1)) \cdot e^{a \cdot (3 - x)}$

2007-AI: $f_a'(x) = -\frac{2a}{x\,(x-2a)}$; $f_a''(x) = \frac{4a(x-a)}{x^2(x-2a)^2}$

2007-AII: $f_a'(x) = \frac{8a\, e^{-2x}}{(1+a \cdot e^{-2x})^2}$; $f_a''(x) = -\frac{16a\, e^{-2x}(1-a \cdot e^{-2x})}{(1+a \cdot e^{-2x})^3}$

2008-AII: $f_a'(x) = \frac{-e^{ax}\,[x\,(a^2x^2+2ax+2)e^{2ax} - a\,(ax+2)]}{(1+x^2 \cdot e^{2ax})^2}$; $f_a''(x) =$ ....

2010-AI: $f_a'(x) = -\frac{2a}{x^3-ax}$; $f_a''(x) = \frac{2a\,(3x^2-a)}{(x^3-ax)^2}$

2010-AII: $f_a'(x) = \frac{2a}{x^3}$; $f_a''(x) = -\frac{6a}{x^4}$

2011-AI: $g_a'(x) = -2a\, e^{-x} + 2a^2\, e^{-2x}$; $g_a''(x) = 2a\, e^{-x} - 4a^2\, e^{-2x}$

2011-AII: $f_a'(x) = \frac{x^2-a^2}{x^3+a^2x}$; $f_a''(x) = \frac{-x^4+4a^2x^2+a^4}{(x^3+a^2x)^2}$

2012-AII: $f_a'(x) = 3 \cdot \frac{(a^2+6)\cdot x}{(3x^2+a)^2}$; $f_a''(x) = -3 \cdot \frac{(a^2+6)\cdot(9x^2-a)}{(3x^2+a)^3}$

2013-AI: $f_a'(x) = \frac{-2a^2}{x^3+a^2x}$; $f_a''(x) = \frac{2a^2\cdot(3x^2+a^2)}{(x^3+a^2x)^2}$

2013-AII: $f_a'(x) = (-ax^2 + 2x + a^3) \cdot e^{-ax}$; $f_a''(x) = (a^2x^2 - 4ax - a^4 + 2) \cdot e^{-ax}$

$h'(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$; $h''(x) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2014-AII: $f_a'(x) = \frac{-4e^x\cdot((a-1)e^{ax}-1)}{(1+e^{ax})^2}$; $f_a''(x) = \ldots$

2015-AI: $f_a'(x) = \frac{-2e^x\cdot(e^{2x}-a)}{(a+e^{2x})^2}$; $f_a''(x) = \frac{2e^x\cdot(e^{4x}-6ae^{2x}+a^2)}{(a+e^{2x})^3}$

$k'(x) = 1 - 2\,e^{2x-10}$; $k''(x) = -4\,e^{2x-10}$

2015-AII: $k'(x) = (x-1)\cdot e^x$; $k''(x) = x\,e^x$

Lösungen 0.4

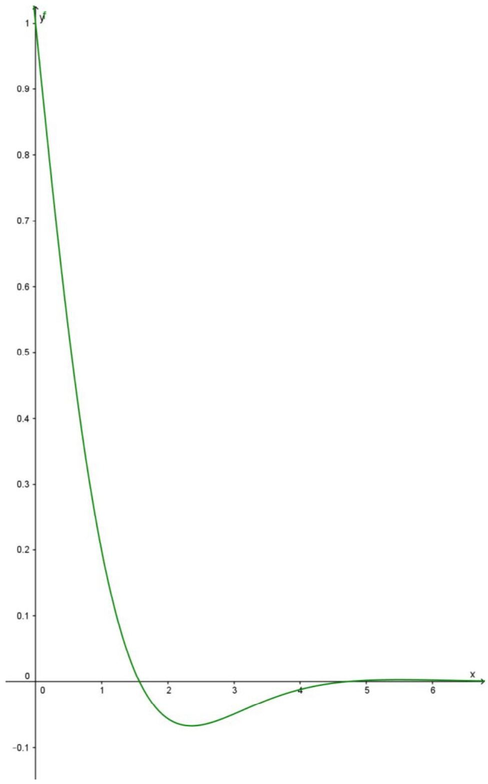
a) Wiederholung

114/9

a) Nullstellen: $x_1 = \pi/2$; $x_2 = 3\pi/2$

TiP($3\pi/4$| $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-3\pi/4}$); HoP($7\pi/4$| $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-7\pi/4}$) (WeP$_1$(0| 1);) WeP$_2$($\pi$| $-e^{-\pi}$) (; WeP$_3$(2π| $e^{-2\pi}$))

b)



c) $P_k(2k\pi|\ e^{-2k\pi})$ mit $k\in\mathbb{Z}$

d) Berührpunkte, da $f_a'(2k\pi) = g_a'(2k\pi)$

115/11

a) $D_f = \mathbb{R}^+$

b) $\lim_{x\to 0^+}[x\cdot(\ln x)^2] = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-2x\ln x) = 0$ (FS!)

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ (mit Ergebnis aus b); $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0^+$

d) $f'(x) = -\frac{1}{(x\cdot(\ln x)^2 + x)^2}\cdot(x\cdot(\ln x)^2 + x)' = -\frac{1}{(x\cdot(\ln x)^2 + x)^2}\cdot\left((\ln x)^2 + x\cdot\frac{2\ln x}{x} + 1\right)$

$= -\frac{1}{(x\cdot(\ln x)^2 + x)^2}\cdot((\ln x)^2 + 2\ln x + 1) = -\frac{(\ln x + 1)^2}{(x\cdot(\ln x)^2 + x)^2}$

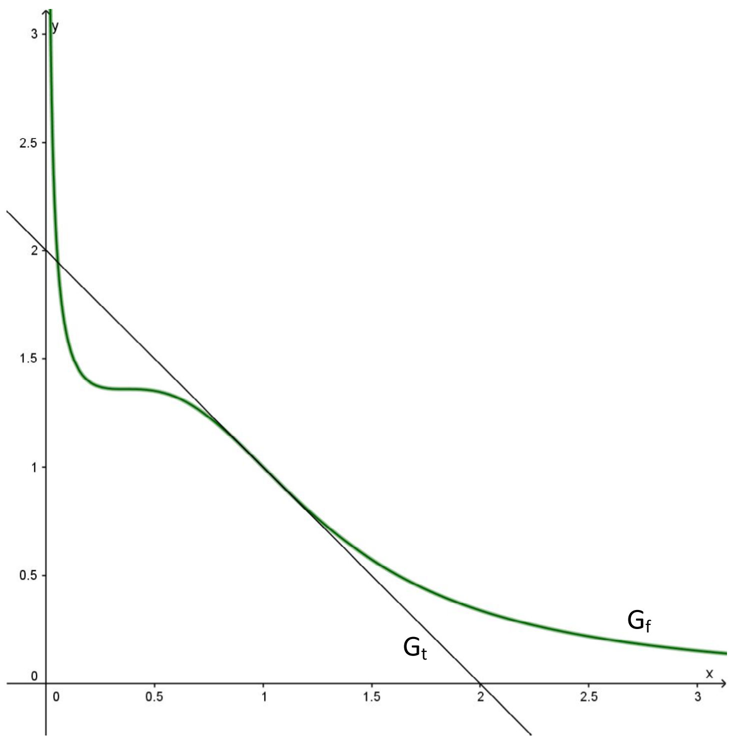
e) Nenner von f ' ist > 0, Zähler ist ≥ 0; Zähler = 0 nur für $x_1 = 1/e$

==> G_f ist smf in]0;1/e] und [1/e;∞[==> TeP bei 1/e; ... P(1/e | e/2)

f) $W_f = \mathbb{R}^+$ wegen Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge und Monotonie (und Stetigkeit)

g) y = f(1) = 1; m = f '(1) = –1 ==> t: y = –x + 2

h)



b) Ortskurven

114/6

a) HoP(0|0)

$TiP_1(2a \mid -4a^4) \implies y = -0{,}25x^4 \ (x > 0)$; $TiP_2(-0{,}5a \mid -3a^4/32) \implies y = -1{,}5x^4 \ (x < 0)$

b) $HoP(0 \mid -2/a) \implies x = 0 \ (y < 0)$

c) $TiP(0 \mid 0)$; $HoP_{1,2}(\pm\sqrt{2}a \mid a^2) \implies y = 0{,}5x^2$

d) $HoP\left(\frac{1}{\sqrt{2a}} \middle| \frac{4}{\sqrt{2ae}}\right) \implies y = \frac{4}{\sqrt{e}} x \ (x > 0)$; $TiP\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}} \middle| -\frac{4}{\sqrt{2ae}}\right) \implies y = \frac{4}{\sqrt{e}} x \ (x < 0)$

e) $0 < a < 1$: $TiP_{1,2}\left(\pm\sqrt{1-a^2} \middle| 1-a^2\right) \implies y = x^2 \ (0<y<1)$; $HoP(0 \mid -2 \ln a) \implies x = 0 \ (y > 0)$

$a \geq 1$: $TiP(0 \mid -2 \ln a) \implies x = 0 \ (y < 0)$

f) $TiP(e^a \mid -a^2) \implies y = -(\ln x)^2 \quad (x > 0)$

114/7

a) $WeP_1(a \mid -0{,}375a^4) \implies y = -0{,}375x^4 \ (x > 0)$; $WeP_2(-2a \mid -2a^4) \implies y = -0{,}125x^4 \ (x < 0)$

b) $WeP_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}a \middle| \frac{5}{9}a^2\right) \implies y = \frac{5}{6}x^2$

c) $WeP(e^{1+a} \mid 1 - a^2) \implies y = \ln x \, (2 - \ln x) \quad (x > 0)$

d) $WeP_{1,2}(\pm 2\sqrt{a} \mid \ln(2a)) \implies y = 2 \ln|x| - \ln 2$

e) $WeP_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2a}} \middle| \frac{a}{2\sqrt{e}}\right) \implies y = \frac{1}{4\sqrt{e}\,x^2}$

114/8   (exakt: 0,5 arctan 4)

$HoP(\approx 0{,}6629 + k\frac{\pi}{2} \mid \approx \frac{4}{\sqrt{17}} e^{-\frac{0{,}6629}{2} - k\frac{\pi}{4}})$ (k gerade) $\implies$ $x = \frac{4}{\sqrt{17}} e^{-\frac{t}{2}}$

$TiP(\approx 0{,}6629 + k\frac{\pi}{2} \mid \approx -\frac{4}{\sqrt{17}} e^{-\frac{0{,}6629}{2} - k\frac{\pi}{4}})$ (k ungerade) $\implies$ $x = -\frac{4}{\sqrt{17}} e^{-\frac{t}{2}}$

115/10

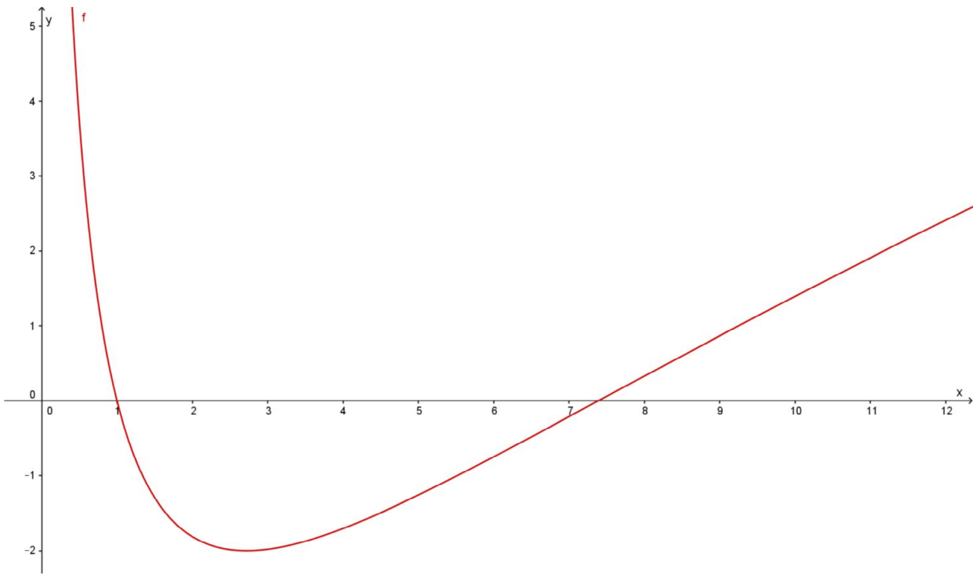
c) Nullstellen: $x_1 = 1$; $x_2 = e^{k/2}$; $TiP(e^{k/4} \mid -k^2/8)$; $WeP(e^{1+k/4} \mid 2 - k^2/8)$

d) da $f_k(x) \to \infty$ für $x \to 0^+$ und für $x \to \infty$ (und f stetig) $\implies$ TiP ist absolut

Ortskurve: $y = -2 (\ln x)^2$ mit $x > 1$

$x > 0$ und $y < 0$ $\implies$ alle absoluten TiP liegen im IV. Quadranten

f)



116/13

a) Nullstelle: $x_1 = 0$; G_a symmetrisch zum Ursprung; $f_a(x) \to 0$ für $x \to \infty$

b) (vgl. 6d !) HoP$\left(\frac{1}{\sqrt{2a}} \middle| \frac{4}{\sqrt{2ae}}\right)$; TiP$\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}} \middle| -\frac{4}{\sqrt{2ae}}\right)$; WeP$_1$(0|0); WeP$_{2,3}\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2a}} \middle| \pm 4\sqrt{\frac{3}{2ae^3}}\right)$

c) (vgl. 6d !) $y = \frac{4}{\sqrt{e}}\, x$ $(x \neq 0)$

d) $y = 4\, e^{-at^2}\, (1 - 2at^2)\,(x - t) + 4t\, e^{-at^2}$ (siehe i) !)

e) $a = 1/6$ ==> WeP$_2$(3 | 12 $e^{-3/2}$) ==> w: $y = -8\, e^{-3/2}\,(x - 3) + 12\, e^{-3/2}$

$y = 0$ ==> ... $x = 4{,}5$

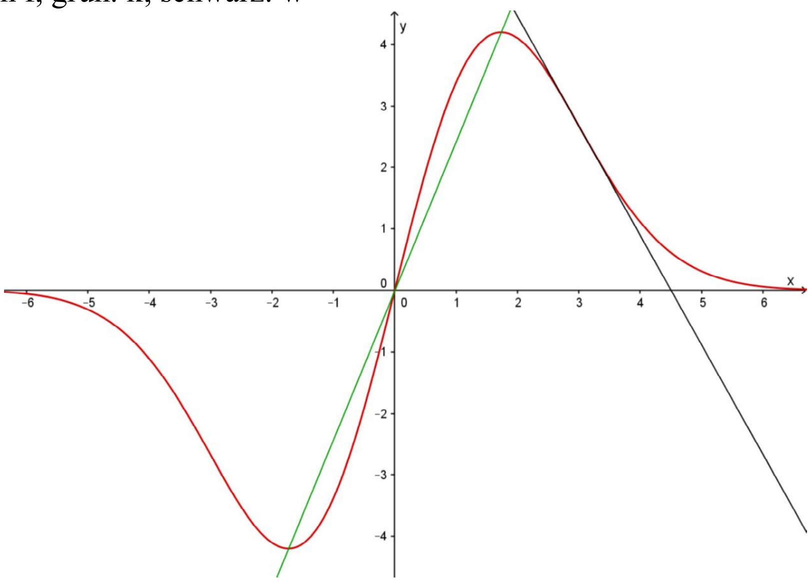
f) *nächste Seite*

i) t: $y = 4\, e^{-t^2/6}\, (1 - t^2/3)\,(x - t) + 4t\, e^{-t^2/6}$

S einsetzen ==> ... $2t^3 - 9t^2 + 27 = 0$

$t_1 = 3$ bekannt; $(2t^3 - 9t^2 + 27):(t - 3) = ...$; $2t^2 - 3t - 9 = 0$ ==> $t_2 = 3 = t_1$; $t_3 = -1{,}5$

f) rot: Graph von f; grün: k; schwarz: w



117/15

a) $f_a(\ln\sqrt{a} + d) = \frac{2\sqrt{a}\, e^{d}}{a + a\, e^{2d}}$; $f_a(\ln\sqrt{a} - d) = \frac{2\sqrt{a}\, e^{-d}}{a + a\, e^{-2d}}$

z. B. durch Erweitern des zweiten Terms mit e^{2d} sieht man, dass beide Terme gleich sind

(oder: zeige erst (Kürzen mit e^x, ...), dass $f_a(x) = \frac{2}{\sqrt{a}} \frac{1}{e^{x - \ln\sqrt{a}} + e^{-(x - \ln\sqrt{a})}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\cosh(x - \ln\sqrt{a})}$ ist)

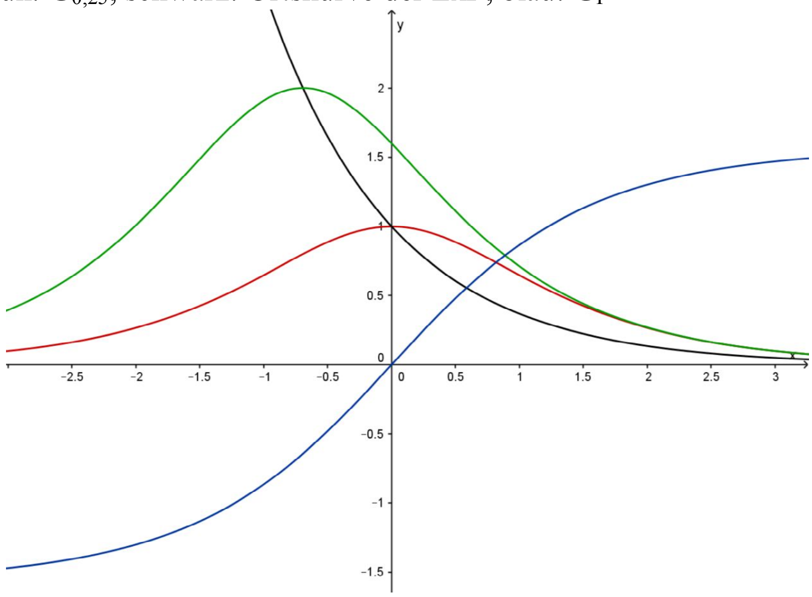
da außerdem D symmetrisch zu $\ln\sqrt{a}$ ist ==> G_a ist symmetrisch zu $x = \ln\sqrt{a}$

b) $f_a(x) \to 0^+$ für $x \to \pm\infty$

$f_a'(x) = \frac{2\, e^{x}\, (a - e^{2x})}{(a + e^{2x})^2}$ ==> G_a ist sms in $]-\infty; \ln\sqrt{a}]$, smf in $[\ln\sqrt{a}; \infty[$

==> HoP$(\ln\sqrt{a} \mid \frac{1}{\sqrt{a}})$ ==> $y = e^{-x}$

c), j) rot: G_1; grün: $G_{0,25}$; schwarz: Ortskurve der ExP; blau: G_F



Lösungen 0.5

a) Grundbegriffe

69/1 a) 4585 b) 72795 c) 10 497 600 d) 3 304 800

69/2

a) (vgl. 6a !) $f'(x) = -0{,}5x - 1 > 0$ in $]-6; -2[$ ==> G_f ist sms in I; $O_5 = 16{,}16$; $U_5 = 12{,}96$

b) $g'(x) = \frac{2}{3}x - 1 > 0$ in $[2;4]$ ==> G_g ist sms in I; $O_4 = -5{,}25$; $U_4 = -6{,}25$

69/3

Das Intervall [a;b] hat die Breite b–a; wenn man es in n Streifen unterteilt, hat jeder einzelne Streifen also die Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Der erste Streifen geht dann von a bis a + Δx, der zweite von a + Δx bis a + 2 Δx usw., der letzte von a + (n–1) Δx bis a + n Δx = b.

a) Weil f smz ist, ist im ersten Streifen f(a) = f(a + 0 · Δx) der kleinste Funktionswert, im zweiten Streifen f(a + Δx) = f(a + 1 · Δx) usw., im letzten f(a + (n–1) · Δx). Die Flächeninhalte der Rechtecke sind also f(a + 0 · Δx) · Δx, f(a + 1 · Δx) · Δx, ..., f(a + (n–1) · Δx) · Δx.
Wenn man alle diese Flächeninhalte aufsummiert, erhält man U_n.

b) Weil f smz ist, ist im ersten Streifen f(a + 1 · Δx) der größte Funktionswert, im zweiten Streifen f(a + 2 · Δx) usw., im letzten f(a + n · Δx). Die Flächeninhalte der Rechtecke sind also f(a + 1 · Δx) · Δx, f(a + 2 · Δx) · Δx, ..., f(a + n · Δx) · Δx.
Wenn man alle diese Flächeninhalte aufsummiert, erhält man O_n.

69/4

Man vertauscht die beiden Formeln einfach (weil nun jeweils der größte Funktionswert am linken Rand der Streifen ist und der kleinste am rechten Rand):

$U_n = \sum_{i=1}^{n} f(a + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$ und $O_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$

69/5 $U_5 \approx 4{,}79$; $O_5 \approx 6{,}58$

69/7 b) $O_4 \approx 1{,}979$; $U_4 \approx 1{,}724$

69/6

a) (vgl. 2a !) G_f ist sms in $]-\infty;\ -2]$, smf in $[-2;\ \infty[$

$O_n = \ldots = \frac{44}{3} + \frac{8}{n} - \frac{8}{3n^2}$; $U_n = \ldots = \frac{44}{3} - \frac{8}{n} - \frac{8}{3n^2}$

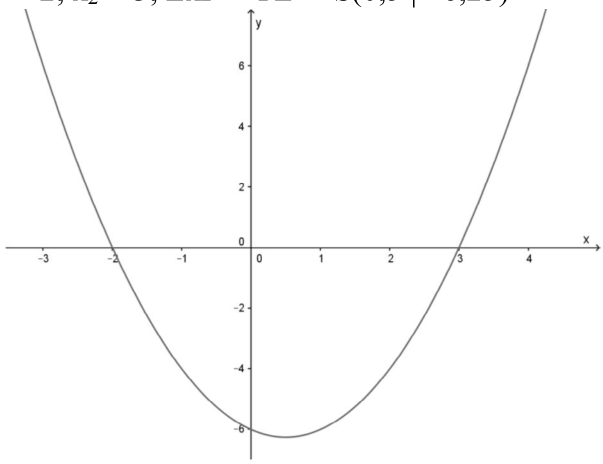
b) G_g ist sms in $]-\infty;\ -0{,}5]$, smf in $[-0{,}5;\ \infty[$

$O_n = \ldots = \frac{15}{4} + \frac{3}{n} - \frac{3}{4n^2}$; $U_n = \ldots = \frac{15}{4} - \frac{3}{n} - \frac{3}{4n^2}$

<u>b) Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung</u>

72/25

a) Nullstellen von f: $x_1 = -2$; $x_2 = 3$; ExP = TiP = S(0,5 | –6,25)



F(0) = $\int_0^0 f(t)dt$ = 0 ==> Nullstelle $x_1 = 0$

mit G_f folgt: weitere Nullstellen $x_2 < -2$; $x_3 > 3$

b) aus VZ von f folgt: G_F ist sms in $]-\infty;-2]$ und $[3; \infty[$, smf in $[-2; 3]$

==> HoP bei –2; TiP bei 3

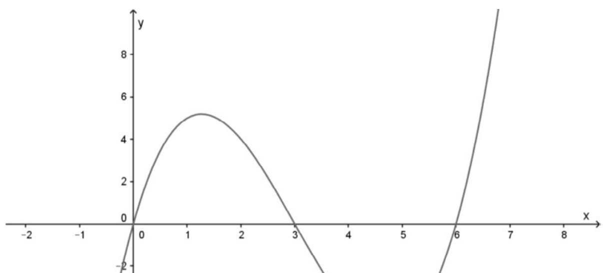
aus Monotonie von G_f folgt: G_F ist linksgekrümmt in $]-\infty; 0{,}5]$, rechtsgekrümmt in $[0{,}5; \infty[$

==> WeP bei 0,5

72/26

a) Nullstellen von f: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 6$

TiP($3 + \sqrt{3} \approx 4{,}73 \mid\ \approx -5{,}20$); HoP($3 - \sqrt{3} \approx 1{,}27 \mid\ \approx 5{,}20$)



F(3) = $\int_3^3 f(t)dt$ = 0 ==> Nullstelle $x_{1,2} = 3$ (weil auch einf. Nst. von f ==> doppelt)

mit G_f folgt: weitere Nullstellen $x_3 < 0$; $x_4 > 6$

b) aus VZ von f folgt: G_F ist sms in $[0;\ 3]$ und $[6;\infty[$, smf in $]-\infty;0]$ und $[3; 6]$
==> HoP bei 3 (==> Nullstelle 3 ist doppelt!); TiP bei 0 und bei 6
aus Monotonie von G_f folgt: G_F ist linksgekrümmt in $]-\infty;\ 3-\sqrt{3}]$ und $[3+\sqrt{3};\ \infty[$, rechtsgekrümmt in $[3-\sqrt{3};\ 3+\sqrt{3}]$ ==> WeP bei $3-\sqrt{3}$ und bei $3+\sqrt{3}$

73/28
a) $D_F =]-1;\ \infty[$
$F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ ==> Nullstelle $x_{1,2} = 0$ (weil auch einf. Nst. von f ==> doppelt)
einzige Nullstelle!
aus VZ von f folgt: G_F ist sms in $]-1;\ 0]$, smf in $[0;\infty[$ ==> HoP bei 0
F(0) = 0 (Nullstelle, s.o.) ==> HoP(0|0)
aus Monotonie von G_f folgt: G_F ist rechtsgekrümmt in $]-\infty;\ 1]$, linksgekrümmt in $[1;\infty[$
==> WeP bei 1
aus Zeichnung: F(1) = Flächeninhalt zwischen 0 und 1 $\approx -\frac{2}{3}$ ==> WeP(0 | $\approx -\frac{2}{3}$)

73/30
a) $D_f =]1;\ \infty[$; Nullstelle: $x_{1,2} = 2$
G_f ist sms in]1; 2], smf in [2; ∞[; HoP(2|0)
b) aus Monotonie und HoP in (a) folgt: $f(x) \leq 0$
==> G_F ist smf in]1; 2] und in [2; ∞[==> keine ExP (aber TeP bei 2)
$F(2) = \int_2^2 f(t)dt = 0$ ==> Nullstelle $x_{1,2,3} = 2$ (dreifach, weil dort TeP)
wg. Monotonie: einzige Nullstelle
aus Monotonie von G_f folgt: G_F ist linksgekrümmt in] 1; 2], rechtsgekrümmt in [2; ∞[==> WeP bei 2 (= TeP)

73/31
a) Zähler von $f_a \neq 0$ ==> f_a hat keine Nullstellen; G_{fa} ist smf in $\mathbb{R}$
b) $f_a(x) > 0$ ==> G_F ist sms in $\mathbb{R}$
$F(0) = \int_0^0 f_a(t)dt = 0$ ==> Nullstelle $x_1 = 0$; wg. Monotonie: einzige Nullstelle
aus Monotonie von G_f folgt: G_F ist rechtsgekrümmt in $\mathbb{R}$ ==> keine WeP

117/15
d) aus (c): f(x) > 0 ==> G_F ist sms in $\mathbb{R}$
$F(-x) = \int_0^{-x} f_1(t)dt = \int_0^{-x} f_1(-t)dt$ (G_1 symmetrisch zur y-Achse ==> $f_1(t) = f_1(-t)$)
$= [-F(-t)]_0^{-x}$ (F ist Stammfunktion zu f_1; Regel für Stammfunktion von f(ax+b) !)
$= -F(-(-x)) + F(0) = -F(x)$
und D_F symmetrisch zu 0 ==> G_F ist symmetrisch zum Ursprung
e) G_1 hat genau einen ExP bei 0 ==> G_F hat genau einen WeP bei 0
$F(0) = \int_0^0 f_1(t)dt = 0$ ==> WeP(0|0)
$F'(0) = f_1(0) = 1$ ==> w: y = x
f) F(b) ist der Inhalt der Fläche zwischen G_1 und der x-Achse zwischen x = 0 und x = b.
Da G_1 für x > 0 smf ist, liegt ein Rechteck von x = 0 bis x = b mit Höhe $f_1(b)$ sicher unter dem Graph, also ist sein Flächeninhalt $b \cdot f_1(b)$ sicher kleiner als F(b).
da F(0) = 0 und $f_1(0) = 1$ ==> $f_1(0) > F(0)$
mit gegebener Formel folgt: $F(1) > 1 \cdot f_1(1)$, also $f_1(1) < F(1)$
==> $d(x) := f_1(x) - F(x)$ hat in [0;1] also einen VZW; stetig ==> mind. eine Nullstelle
da in [0;1] G_1 smf ist und G_F sms ==> G_d ist in [0;1] smf ==> genau eine Nullstelle
==> genau ein Schnittpunkt von G_1 und G_F

c) Berechnung von Integralen

69/8

a) $1{,}5x^2$ b) $x^2 + 5x$ c) $-\frac{1}{6}x^3$ d) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

e) $x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ f) $-x^5 + \frac{2}{3}x^3$ g) $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ h) $\frac{a}{n+1}x^{n+1} - \frac{b}{n}\,x^n$

70/9

a) $\frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}x - 3\right)^5$ b) $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)^4$ c) $\frac{1}{3}\sin(5 - 3x)$ d) $-\frac{1}{6}\cos(3x - 2)$

70/10

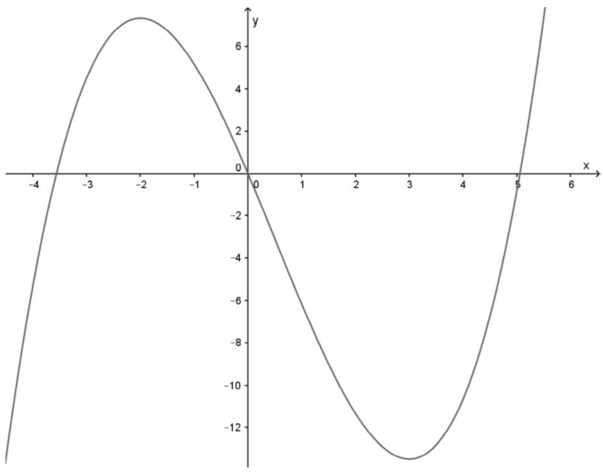
a) $x^3 - 2x^2 + 7x + C$ b) $-x^{-1} + C$ c) $\cos x + 3\sin x + C$ d) $-\cos x + x + C$

72/25

c) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$

Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \frac{3\pm\sqrt{297}}{4}$ ==> $x_2 \approx 5{,}06$; $x_3 \approx -3{,}56$

HoP$(-2 \mid \frac{22}{3})$; TiP$(3 \mid -13{,}5)$; WeP$(0{,}5 \mid -3\frac{1}{12})$

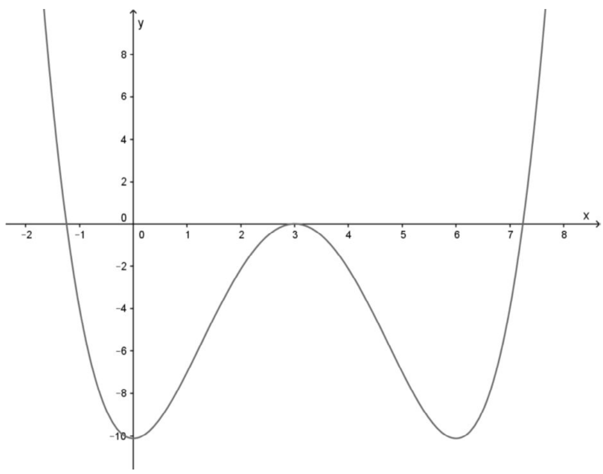


72/26

c) $F(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 81)$

Nullstellen: $x_{1,2} = 3$; $x_{3,4} = 3\pm3\sqrt{2}$ ==> $x_2 \approx 7{,}23$; $x_3 \approx -1{,}23$

HoP$(3 \mid 0)$; TiP$_1(0 \mid -10{,}125)$; TiP$_2(6 \mid -10{,}125)$; WeP$_{1,2}(3\pm\sqrt{3} \mid -5{,}625)$



94/1

a) $\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C$

b) $-\frac{9}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}x + 2\right) + C$

c) $\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2x + C$

d) $\tan x + C$

f) $-\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{2}{e+1}x^{e+1} + C$

g) $\ln|4x + 6| + C$

h) $-\frac{1}{4x+6} + C$

i) $-\frac{1}{2}\frac{1}{(4x+6)^2} + C$

j) $2\ln|x + 4| + C$

k) $\ln|\ln x| + C$

l) $-\ln|\cos x| + C$

m) $-e^{-x} + C$

n) $\frac{1}{2}e^{2x} + C$

o) $-e^{2-x} + C$

p) $-e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$

u) $\frac{a}{b}e^{bx+c} + D$

96/11

a) $0{,}5\ln|4x - 1| + C$

b) $-2\ln|3 - x| + C$

c) $-1{,}5\ln|1 - 2x| + C$

d) $0{,}5\ln|2x^2 - 6x + 4| + C$

e) $\frac{2}{3}\ln|3x^2 + 3x + 1| + C$

f) $-\frac{1}{32}\ln|(8x - 2)^2 + 1| + C$

g) $\ln|(x - 3)^3 + 27| + C$

h) $\frac{1}{6}\ln|4x^3 + 3x^2 + 8| + C$

i) $\frac{1}{2}\ln|4x^4 + 3x^2 - 5| + C$

d) Anwendungen

70/11

a) $x_1 = -5$; $x_2 = 2$; $A = 57\frac{1}{6}$

b) $x_1 = 1$; $x_2 = 1{,}5$; $A = \frac{1}{48}$

c) $x_1 = -2$; $x_2 = 7$; $A = 121{,}5$

d) $x_1 = -1$; $x_2 = 5$; $A = 18$

e) $x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $A = \frac{1}{30}$

f) $x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $A = 10\frac{2}{3}$

g) $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$; $A = 11\frac{5}{6}$

h) $x_{1,2,3} = 2$; es wird keine Fläche eingeschlossen!

i) $x_{1,2} = -1$; $x_3 = 5$; $A = 21{,}6$

j) $x_1 = 2$; $x_{2,3} = 5$; $A = 1{,}35$

k) $x_1 = -5$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $A = 7{,}2$

l) $x_1 \approx -3{,}568$; es wird keine Fläche eingeschlossen!

m) $x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$; $A = 5\frac{11}{12}$

n) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $A = 10\frac{13}{24}$

o) $x_1 = -8$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $A = 81\frac{13}{48}$

p) $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_{3,4} = 2$; $A = 15\frac{133}{240}$

q) $x_{1,2} = \pm 3$; $x_{3,4} = \pm 2$; $A = 23\frac{14}{15}$

r) $x_1 = \pm 6$; $x_2 = \pm 2\sqrt{3}$; $A = 44{,}8\sqrt{3} - 28{,}8 \approx 48{,}80$

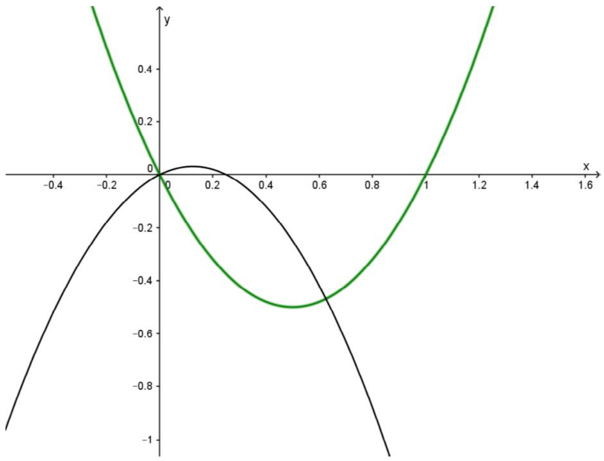
s) $x_{1,2} = \pm 2$; $A = 19{,}2$

t) $x_1 = \pm\sqrt[4]{5}$; $A = 2\sqrt[4]{5} \approx 2{,}99$

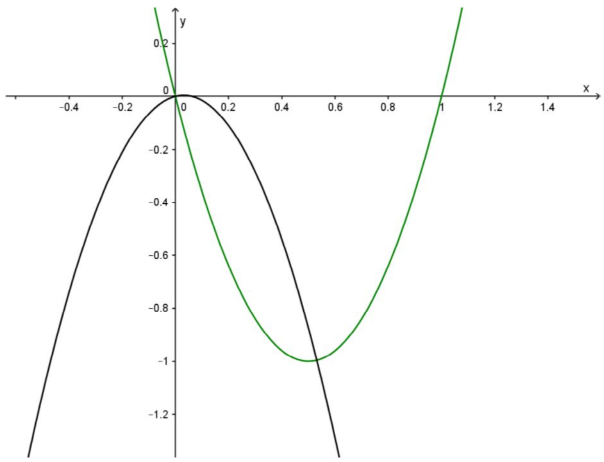
70/12 $\frac{89}{120}$

70/13 a) $11\frac{13}{30}$; Verhältnis $30:49 \approx 0{,}61$ b) $1\frac{29}{75}$; Verhältnis $52:153 \approx 0{,}34$

70/14
a) jeweils: Graph von f grün, Graph von g schwarz
a = 2:



a = 4:



b) A(a) = $\frac{1}{24}\, a \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)^3$ c) a ≈ 0,53 oder a ≈ 50,94

70/15 a = ± 4

71/20 (Anmerkung: Der Graph von f ist symmetrisch zu t = 30!)
s ≈ 11,85 km; Δx ≈ 6,53 km

71/21 a) 4,48 J b) 5,6 J c) W = $\int_0^s F(x)dx = \int_0^s D\,x\,dx = \left[\frac{1}{2} D\,x^2\right]_0^s = \frac{1}{2} D\,s^2$

71/22
v(t) = ... = $3t^3 - 162t^2 + 2187t$
$\int_0^T v(t)dt = 0{,}75T^4 - 54T^3 + 1093{,}5T^2$
$0{,}75T^4 - 54T^3 + 1093{,}5T^2 = 132\,192$
durch Probieren: T = 24 (Graph skizzieren ==> nur eine Lösung)

72f/27
a) $A_{gesamt} = F(7) - F(1) \approx 7{,}6$; $A_{links} = F(4) - F(1) \approx 2{,}6$ ==> $A_{rechts} \approx 5$ ==> Verhältnis $\approx$ 1:2
b) $B = F(6) - F(3) \approx 4{,}5$
c) $G'(x) = ... = f(x)$
(a) $A_{gesamt} = G(7) - G(1) = -6 + 7 \ln 7 \approx 7{,}62$; $A_{links} = G(4) - G(1) = -3 + 4 \ln 4 \approx 2{,}54$;
$A_{rechts} = G(7) - G(4) = -3 + 7 \ln 7 - 4 \ln 4 \approx 5{,}08$ ==> Verhältnis: $\approx 0{,}501 \approx$ 1:2
(b) $B = G(6) - G(3) = -3 + 6 \ln 6 - 3 \ln 3 \approx 4{,}45$

Lösungen 0.6

113/3
mit Falz: $A(r) = 2\pi\,(r + 0{,}75)^2 + 2\pi\, r \left(\frac{500}{\pi\, r^2} + 1\right)$; $A(r) \to \infty$ für $r \to \infty$ und für $r \to 0$
mit Newton-Verfahren: absolut minimal für $r \approx 3{,}92$ ==> $h \approx 10{,}35$; $A \approx 417$
ohne Falz: $A(r) = 2\pi\, r \left(r + \frac{500}{\pi\, r^2}\right)$; $A(r) \to \infty$ für $r \to \infty$ und für $r \to 0$
absolut minimal für $r \approx 4{,}30$ ==> $h \approx 8{,}61$; $A \approx 349$ ($\approx$ 16% weniger Verbrauch!)

113/4
Abwurf im Ursprung: $x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t$; $y(t) = -0{,}5\, g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t$
==> $y = -0{,}5\, g\, \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha)\, x$
Hang: $y = x$
Schnitt ==> ($x_1 = 0$;) $x(\alpha) = \frac{2\, v_0^2}{g}\,(\tan \alpha \cos^2\alpha - \cos^2\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\,(\sin(2\alpha) - \cos(2\alpha) - 1)$
maximal für $\alpha = 0{,}375\pi = 67{,}5°$
$\alpha \in [\pi/4; \pi/2]$! $x(\alpha) \to 0$ für $\alpha \to \pi/4$ und $\alpha \to \pi/2$ ==> absolutes Maximum

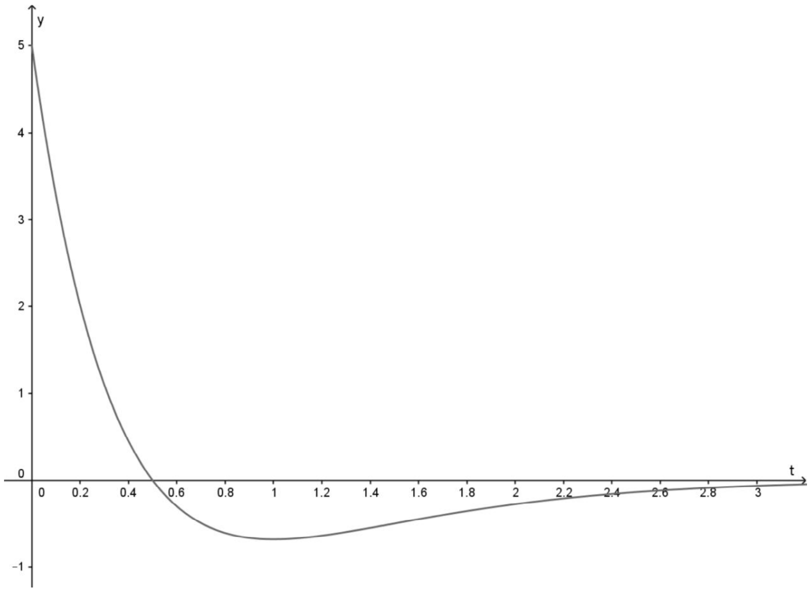
allgemein: Bei einem Hang der Steigung m erhält man die größte Wurfweite, wenn für den Abwurfwinkel $\tan(2\alpha) = -1/m$ *gilt. Dabei muss* $\alpha \in [\arctan(m); \pi/2]$ *sein.*

113f/5
a) Grundseite = x; Höhe = g(x) ==> F(x) = ...
b) $F'(x) = \frac{\left(3\ln(x+1) + \frac{3x}{x+1}\right)\cdot(x+1)^2 - 3x\ln(x+1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = 3\,\frac{\left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right)\cdot(x+1) - x\ln(x+1)\cdot 2}{(x+1)^3} = ...$
c) $x \approx 3{,}24$; $F \approx 0{,}78$

117/17
$D_P = [0;\infty[$; $P'(R) = ... = U_0^2\, \frac{R_i - R}{(R+R_i)^3}$
Nenner ist in D_P positiv; Zähler beschreibt fallende Gerade mit Nullstelle bei $R = R_i$
==> P' hat VZW bei $R = R_i$ von + nach – ==> P hat dort ein relatives Maximum
$P(R) \to 0$ für $R \to 0$ und für $R \to \infty$ ==> absolutes Maximum von P bei $R = R_i$

117/18

Gleichgewichtslage: y = 0 ==> t = 0,5;   Umkehrpunkt: $\dot{y} = 0$ ==> t = 1



118/19

a) g(x) = 3x + 100

b) zunehmend für 0 < t < 3 und 9 < t < 12, abnehmend für 3 < t < 9

c) bei t = 0 und t = 12

d) bei t = $6 \pm 2\sqrt{3}$ (≈ 2,54 und ≈ 9,46)

118/20

a) $u(t) = e^{-0,1t}\,(-0,05 \sin(100\pi t) + 50\pi \cos(100\pi t))$ (u in μV)

b) absolutes Maximum bei t ≈ 0,005, darauffolgendes bei ≈ 0,015

zweites Maximum um etwa 0,2% kleiner als erstes (absolutes)

118/21   vgl. Buch 12. Klasse T 235/8 und Prüfung T12 1999!

Graph ist symmetrisch zu x = L/2 !

a) Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 0,8$ ($x_{3,4} = 0,4 \pm \sqrt{0,8} \notin D$)

TiP(0,4 | –0,128)   (HoP bei $x_{2,3} = 0,4 \pm \sqrt{0,48} \notin D$)

($WeP_1(0 \mid 0)$; $WeP_2(0,8 \mid 0)$ ***Randextrema von f ' !***)

b) f minimal bei x = L/2; einziges Extremum in D ==> absolutes Minimum

118/22   Maxima für t = (arctan 40 + k π) / 8 ≈ 0,193 + k π / 8 (k ∈ ℕ); abs. Max. für k = 0

118/23

Aufgabenstellung unklar! falls die Ausdehnung in y-Richtung gemeint ist: max. $19\frac{2}{9}$, min. 5

71/19   Koordinatensystem: y-Achse in der Mitte der Rückwand

a) ursprüngliche Decke: ... $d(x) = -0,15\,x^2 + 15$;   Zwischendecke: ... $z(x) = a\,x^2 - 100\,a$

$\int_{-10}^{10}(d(x) - z(x))dx = 120$ ==> .... a = –0,09

b) eingesparte Heizkosten pro Jahr: etwa 6680 € ==> knapp 3 Jahre

c) z(9) ≈ 1,71 (m)

d) d(x) = 7,5 ==> x = $\pm 5\sqrt{2}$ ≈ 7,05; $\Delta V = 50 \cdot \int_{-5\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}}(d(x) - 7,5)dx = 2500\sqrt{2}$

d(1) ≈ 2,85

71/23 $13\frac{1}{3}$ m²

72/24

a) verwende z. B. den y-Achsenabschnitt ==> blau: G_f; rot: G_g

b) Brücken: 100 m und 300 m; Fußweg gesamt: 600 m; nicht auf Brücken: 200 m

c) Vom Fußweg ist das Nordufer maximal 180 m entfernt (bei x = 0), von der rechten Brücke maximal etwa 82 m.

d) $y = 0{,}525x - 4{,}375$; von Zugangsstraße zu Fußweg etwa 941 m; $P_F(8\frac{1}{3} \mid 0)$; $P_Z(0 \mid -4{,}375)$