Lösungen III.1

206/35

a) $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{s} = 0\vec{a} - \vec{b} + 0\vec{c}$ c) $\vec{t} = 4\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c}$ d) $\vec{u} = 0\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c}$

e) $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ f) $\vec{w} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ g) $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ h) $\vec{y} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ i) $\vec{z} = \vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

206/36

$\vec{x} = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$ eindeutig; z. B. $\vec{x} = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 0\vec{a}_4$ oder $\vec{x} = -4\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 4\vec{a}_4$ oder ... ➔ nicht eindeutig

206/37 a) $\vec{x} = 2\vec{a} + 0\vec{b}$ b) $\vec{x} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ c) $\vec{x} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$

207/38 a) ja: $\vec{x} = 2\vec{a} + 0\vec{b}$ b) ja: $\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{b}$ c) nein

207/39 a) nein b) z. B. $\vec{v} = 4\vec{a} - 5\vec{b} + 0\vec{c}$ oder $\vec{v} = 0\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$ oder $\vec{v} = -\vec{a} + 5\vec{c}$

c) $\vec{0} = 0\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c}$; außerdem unendlich viele andere Möglichkeiten, z. B. $\vec{v} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

207/40

a) ja: $\vec{0} = 0\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c}$ b) ja: $\vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c}$

c) ja: $\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ d) ja: $\vec{c} = -2\vec{a} + 1(\vec{a} - \vec{b}) + 1(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

208/41 a) für t = 1: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ b) keine Lösung c) keine Lösung

208/42

a) keine Lösung für t = 1, sonst: $\vec{x} = \frac{t-2}{t-1}\vec{a} + \frac{1}{1-t}\vec{b} + \frac{1}{t-1}\vec{c}$

b) keine Lösung für t = 1, sonst: $\vec{x} = \dfrac{t^2 - 2t - 5}{(t-1)^2}\vec{a} + \dfrac{3t}{(t-1)^2}\vec{b} - \dfrac{3}{(t-1)^2}\vec{c}$

208/43 a) nein (1. Komponente immer gleich 0!) b) ja c) ja (z. B. immer dasselbe wie (b) $+ 0\vec{t}_4$)

209/44 ja

212/45 a, b, c linear unabhängig, d linear abhängig

212/46 alle linear abhängig

213/47

a) nein b) ja; z. B. $\vec{0} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ c) ja; z. B. $\vec{0} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) nein e) nein

f) ja; z. B. $\vec{0} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ g) ja; z. B. $\vec{0} = 0\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ h) nein

i) ja; z. B. $\vec{0} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

213/48 a) k = 4 b) k = –2 oder k = 3 ***(vgl. 197/20!)***

213/49 a) $t \neq 2$ b) $t \in \mathbb{R}$ beliebig

215/50

a) linear abhängig, z. B. $\vec{0} = 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD}$ b) linear unabhängig

c) linear abhängig, z. B. $\vec{0} = 2\overrightarrow{ME} + 3\overrightarrow{FC}$ d) linear unabhängig

e) linear abhängig, z. B. $\vec{0} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{CD}$

215/51 abhängig: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_3$, z. B. $\vec{0} = 1\vec{a} + 0\vec{b} - 1\vec{c}_3$

215/52

a) abhängig: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_4$, z. B. $\vec{0} = 2\vec{a} + 0{,}5\vec{b} - 1\vec{c}_1$ bzw. $\vec{0} = \vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} - 1\vec{c}_4$

b) linear abhängig, wenn alle drei in derselben Ebene liegen

216/53 a) ja b) ja c) ja d) nein e) nein f) ja g) ja

216/54 ***siehe II.3***

217/55 a) linear unabhängig b) linear unabhängig c) linear abhängig d) linear abhängig

217/56

a) linear unabhängig b) linear unabhängig c) linear unabhängig

d) linear abhängig e) linear abhängig

217/57

a) linear abhängig b) linear unabhängig c) linear unabhängig

d) linear abhängig e) linear abhängig

292/92

$g_1 \cap g_2$: $\vec{a} + \vec{b} + \lambda(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + \mu(\vec{a} + 2\vec{b})$ ➔ $(-1 + \lambda - \mu)\vec{a} + (1 - \lambda - 2\mu)\vec{b} = \vec{0}$

da $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig sind, folgt: $-1 + \lambda - \mu = 0$ und $1 - \lambda - 2\mu = 0$; dieses LGS hat die eindeutig Lösung $\lambda = 1$, $\mu = 0$ ➔ genau ein Schnittpunkt (mit Ortvektor $\vec{s} = 2\vec{a}$)

Lösungen III.2

a) Begriffe

219/58

a) ja (2 linear unabhängige Vektoren mit je 2 Komponenten)

b) ja (2 linear unabhängige Vektoren mit je 2 Komponenten)

c) nein (linear abhängig)

d) nein (3 statt 2! deswegen automatisch auch: linear abhängig)

219/59 a) ja b) ja c) nein

219/60 a) $k \in \mathbb{R}$ beliebig b) $k \neq 0$

b) Koordinaten eines Vektors bezüglich einer beliebigen Basis

164/30 a) $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ b) $6\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3$ c) $\lambda_1 = a_1$; $\lambda_2 = a_2$; $\lambda_3 = a_3$

220/61 a) $\vec{a} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

221/62 a) $\vec{a} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

222/63
a) 3 linear unabhängige Vektoren mit je 3 Komponenten
b) $\vec{e}_1 = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{e}_2 = \vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$; $\vec{e}_3 = -2\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$
c) $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) + 2(\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}) + 3(-2\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}) = -3\vec{a} + 4\vec{b} + 6\vec{c}$
$\vec{y} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 = 3(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) - (\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}) + 5(-2\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}) = -8\vec{a} + 14\vec{b} + 13\vec{c}$

Blatt:
1) a) ja b) nein c) nein 2) a) nein b) ja c) ja d) ja

3) a) $a \neq 1{,}5$ b) $a \neq -1$ und $a \neq 2$ c) kein a d) $a \neq 10$

4) a) $\lambda_1 = 17$; $\lambda_2 = -7$ b) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -5$ c) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$ d) $\lambda_1 = -12$; $\lambda_2 = 7$
e) $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -8$ f) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$ (ohne Rechnung: Vektoren sind l. u.!)

5) a) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 2$ b) a) $\lambda_1 = 0{,}5$; $\lambda_2 = 0{,}5$; $\lambda_3 = -0{,}5$ c) a) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 4$
d) a) $\lambda_1 = 1{,}5$; $\lambda_2 = -8{,}5$; $\lambda_3 = 9{,}5$ e) a) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 12$ f) a) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$ (l. u.!)