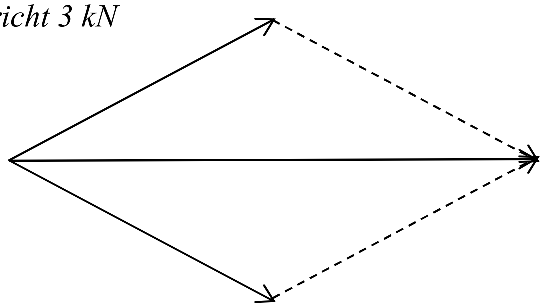
<u>II.1 Zeichnerische Rechenoperationen mit Vektoren</u>

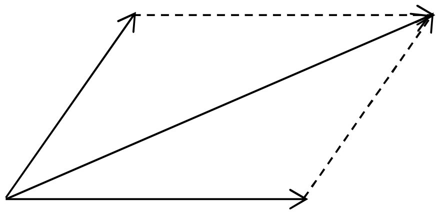
<u>122/1</u>
a) $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{LK}$; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}$ b) $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{IJ}$ c) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{LK}$

<u>129/5</u> *Maßstab: 1 cm entspricht 3 kN*

==> etwa 21 kN



<u>129/6</u> ***Begriff „resultierende Kraft" wird schon in 129/5 verwendet!***
Maßstab: 1 cm entspricht 10 N
==> etwa 62 N



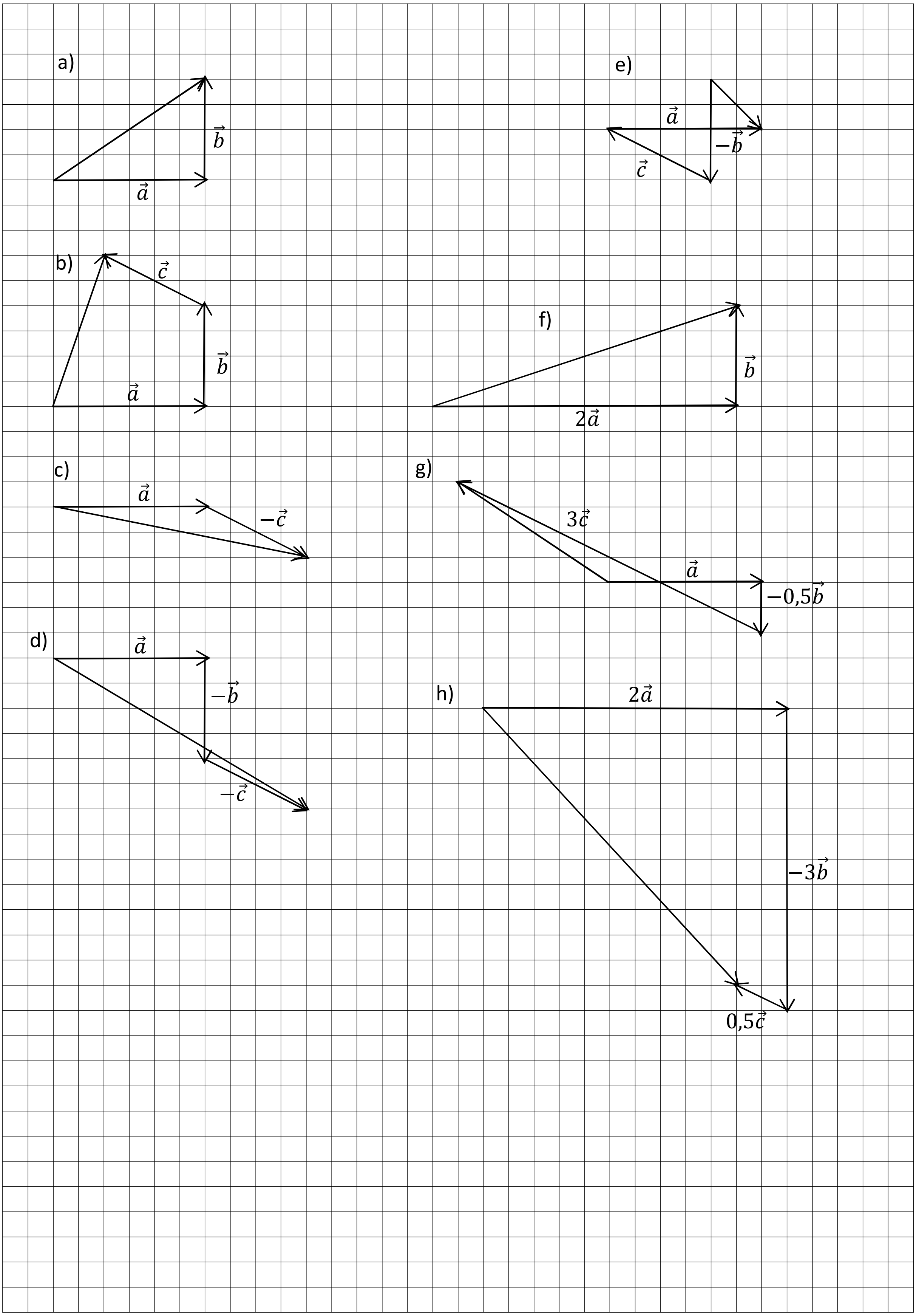
<u>130/11</u> a) unentschieden b) rot; nein

<u>128/1</u> nächste Seite!

<u>128/7</u>
a) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{AH} = \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{HA} = -\vec{b} - \vec{c}$; $\overrightarrow{DF} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
b) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{SE} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ c) $\overrightarrow{MS} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

<u>128/10</u> gelb

<u>129/2</u>
zwei Seiten parallel und gleich lang: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $| + \overrightarrow{BD}$
==> $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$
Kommutativgesetz ==> $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ ==> $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
==> Auch die anderen beiden Seiten sind parallel zueinander und gleich lang. ==> Parallelogramm


a)
$\vec{b}$
$\vec{a}$
b)
$\vec{c}$
$\vec{b}$
$\vec{a}$
c)
$\vec{a}$
$-\vec{c}$
d)
$\vec{a}$
$-\vec{b}$
$-\vec{c}$
e)
$\vec{a}$
$-\vec{b}$
$\vec{c}$
f)
$\vec{b}$
$2\vec{a}$
g)
$3\vec{c}$
$\vec{a}$
$-0,5\vec{b}$
h)
$2\vec{a}$
$-3\vec{b}$
$0,5\vec{c}$

138/11 $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$

138/12
$\overrightarrow{BS} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}$; $\overrightarrow{CS} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}$; $\overrightarrow{DS} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AS}$; $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;
$\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

Lambacher-Schweizer Geometrie 2:
227/6 ohne Zeichnung!
a) $\overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{AR}$ c) $\overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{RQ}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{DA}$ g) $\overrightarrow{RT}$ h) $\overrightarrow{BA}$ i) $\overrightarrow{AD}$ j) $\overrightarrow{PS}$ k) $\overrightarrow{AD}$ l) $\overrightarrow{AD}$

229/4 a) $-\frac{3}{2}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$ b) $6{,}8\vec{a} - 2\vec{c}$ c) $3{,}6\vec{a} - 4{,}5\vec{b}$ d) $\vec{a} - 3{,}3\vec{b}$ e) $8\,\overrightarrow{AB} - 3{,}5\,\overrightarrow{AC}$

229/6 $\vec{x} = -\frac{4}{3}\vec{c} + \frac{3}{2}\vec{b}$; $\vec{y} = -\frac{4}{3}\vec{c} + \frac{6}{5}\vec{d}$; $\vec{z} = -\vec{e} + \frac{6}{5}\vec{d}$; $\vec{u} = -\frac{5}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{e}$; $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{b} + \frac{5}{3}\vec{a}$

230/13 a) $4{,}6\vec{a} - 2{,}5\vec{b}$ b) $-0{,}95\vec{a} - 1{,}5\vec{b}$ c) $-1{,}425\vec{a} - 2{,}25\vec{b}$ d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1{,}2\right)\vec{a} + \left(0{,}5 - 2\sqrt{2}\right)\vec{b}$

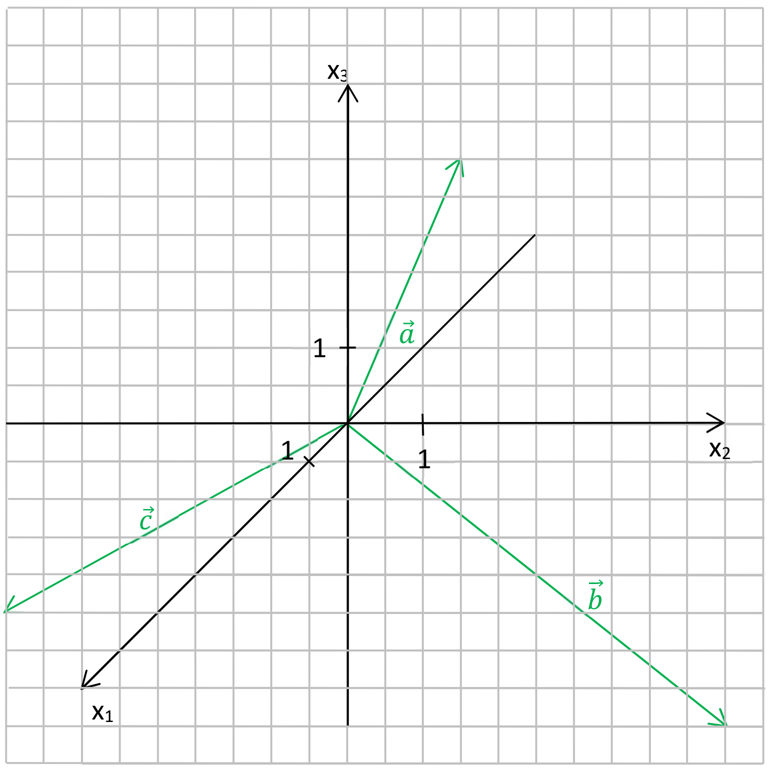
230/14 $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$; $-2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

II.2 Koordinatendarstellung

119/1 a) C(20|25|0); D(0|20|20); E(0|25|0) b) $|\overline{AB}| = 15\sqrt{2}$; $|\overline{CD}| = 20$; $|\overline{AD}| = 30$

119/2
a) A(2|0|0); B(0|2|0); C(–2|0|0); D(0|–2|0); S(0|0|3)
$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}| = 2\sqrt{2}$
$|\overline{AS}| = |\overline{BS}| = |\overline{CS}| = |\overline{DS}| = \sqrt{13}$
b) *Als Streckzentrum wird der Ursprung verwendet.*
A'(4|0|0); B'(0|4|0); C'(–4|0|0); D'(0|–4|0); S(0|0|6)

122/2 a) $|\vec{a}| = \sqrt{77}$ b) $|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$ c) $|\vec{c}| = \sqrt{35}$
a,b,c)



122/3 a) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

122/4 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $u = 4\sqrt{2} + \sqrt{17} + 3$

122/5 nein 122/6 $a = -3$ oder $a = 5$ 122/7 a) C(0|22) b) C(4|11|14)

122/8 $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

128/1

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 5 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$

128/2

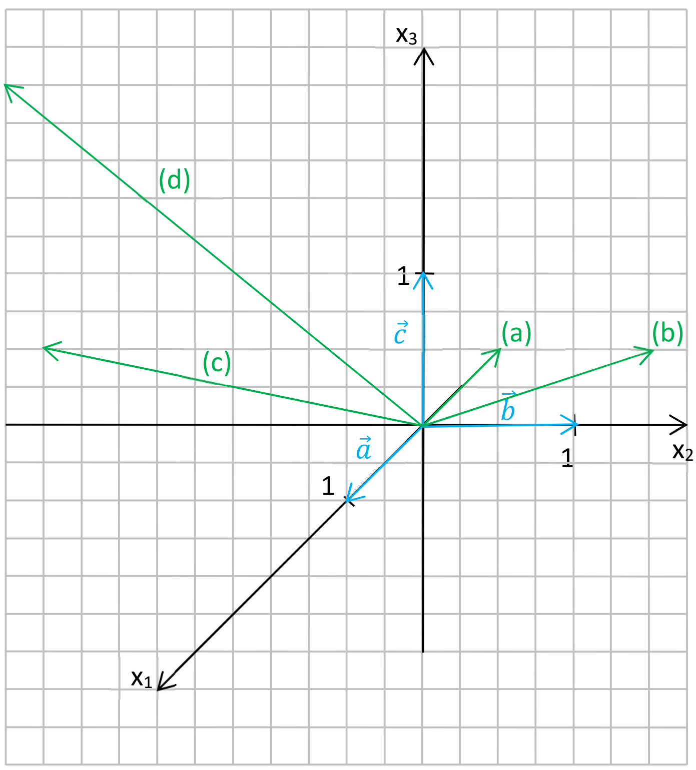
a) $\begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 10{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -4{,}25 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 7/12 \\ -38/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -24 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 24{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}$

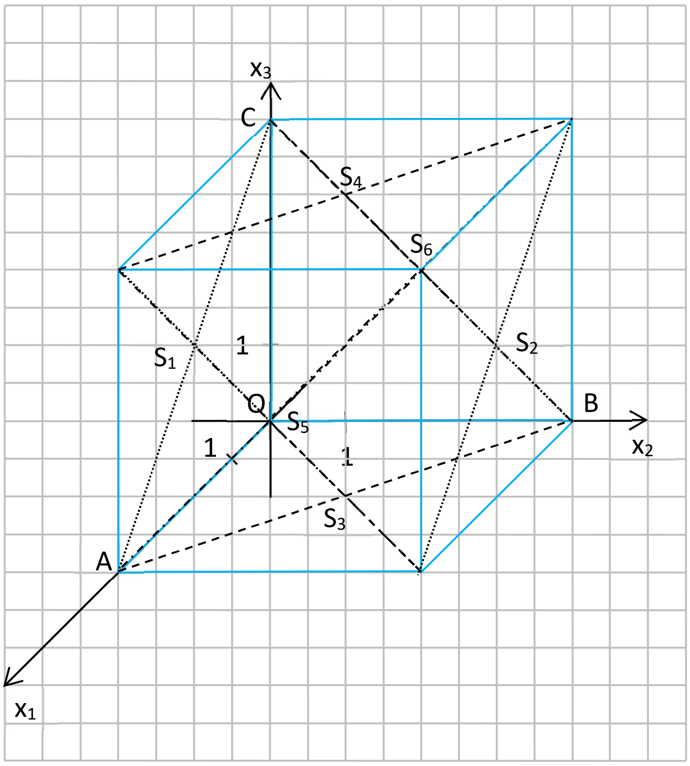
d) $\begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 30{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 22{,}5 \\ -22 \end{pmatrix}$

128/3



128/4 M(5|4|6)

128/5
a,b)



$S_1(2|0|2)$; $S_2(2|4|2)$; $S_3(2|2|0)$; $S_4(2|2|4)$; $S_5(4|2|2)$; $S_6(0|2|2)$

128/6 nein

128/8 a) keine Lösung b) keine Lösung c) x = 6 d) keine Lösung

128/9 ***unlösbar!*** $\left|\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{RS}\right| \geq \sqrt{365} > 11$!

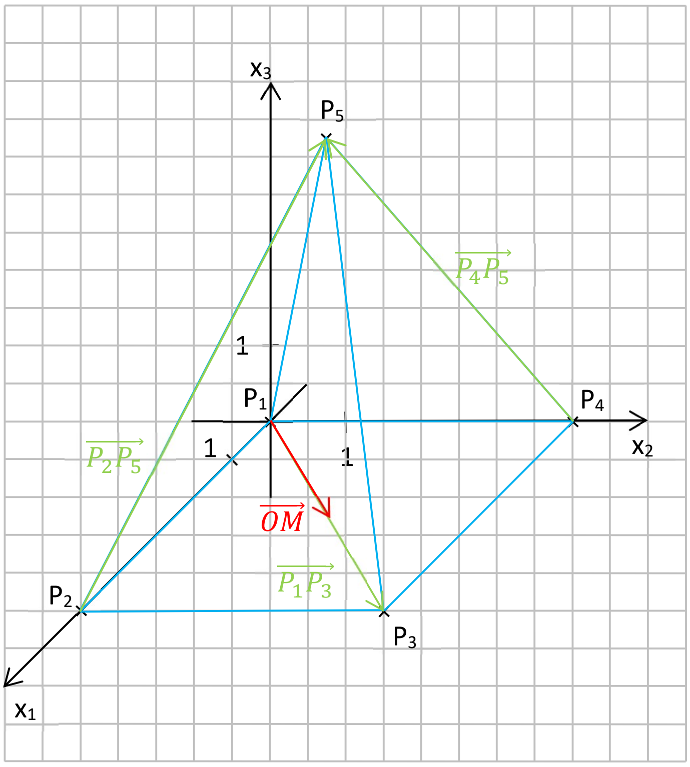
129/1 a) $\begin{pmatrix} 28 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -10{,}9 \\ -9{,}3 \\ -9{,}2 \end{pmatrix}$

129/3
$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{OM_{BC}} - \overrightarrow{OM_{AB}} = \cdots = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$
$\overrightarrow{M_{AD}M_{DC}} = \overrightarrow{OM_{DC}} - \overrightarrow{OM_{AD}} = \cdots = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$
d. h., gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang ==> Parallelogramm

129/4
$\overrightarrow{s_a} = \overrightarrow{AM_a} = \overrightarrow{OM_a} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \overrightarrow{OA}$
ebenso folgt: $\overrightarrow{s_b} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) - \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{s_c} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) - \overrightarrow{OC}$
Insgesamt ergibt sich damit: $\overrightarrow{s_a} + \overrightarrow{s_b} + \overrightarrow{s_c} = \cdots = \vec{0}$

129/7

a,c,e)



b) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{P_3P_4} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{P_4P_5} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{P_4P_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{P_1P_3}$: eine Diagonale der Grundfläche; $\overrightarrow{P_2P_5}, \overrightarrow{P_4P_5}$: Seitenkanten von Grundfläche zu Spitze

d) $\left|\overrightarrow{P_2P_5}\right| = \sqrt{35{,}25} \approx 5{,}94$ = Länge einer Seitenkante

e) $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ f) 5 g) 20

129/8

a) Linienbreiten: ?

Farben: orange; grün, lila, blau

Linienstile: ? *(ist hier so etwas wie durchgezogen, gestrichelt, gepunktet, ... gemeint?)*

Formen der Linienenden: keine; ausgefüllte Kreise; Pfeilspitzen; ausgefüllte Quadrate

b) Die Linienbreite könnte man z. B. in pt (Punkt) messen; für Farben, Stile und Formen der Enden müsste man jeder Möglichkeit jeweils eine Zahl zuordnen. Dann könnte man die Attribute jeder Linie jeweils als einen vierdimensionalen Vektor angeben.

130/9

Um S zu bestimmen, verwendet man $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$, für T verwendet man $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{PR}$, und für U schließlich $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{PQ}$.

Dann sollte man das Zentrum der Streckung festlegen; am einfachsten ist es, wenn man den Ursprung nimmt. Schließlich muss man nur noch die Koordinaten der Punkte bzw. deren Ortsvektoren alle mit 3 multiplizieren.

Endergebnis (neue Punkte):

P'(12|3|6), Q'(12|6|3), R'(7,5|3|6); S'(7,5|4,5|4,5); T'(3|3|6); U'(3 |6|3)

130/10

a) 50 m sollte normalerweise genügen (die höchsten Strommasten Europas sind aber 227 m hoch!)

b) $60 + 100\sqrt{13} \approx 421$ (m)

c) Ich habe keine Ahnung, wie schnell so eine Drohne fliegen bzw. auf- und absteigen kann. Recherchieren Sie mal...

d) Machen Sie mal. Für die rechtlichen Aspekte fragen Sie bitte einen anderen Lehrer...

<u>130/12</u> $\overrightarrow{M_bM_a} = \overrightarrow{OM_a} - \overrightarrow{OM_b} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

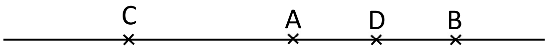
<u>130/13</u>
Die Koordinate zur jeweiligen Achse bleibt jeweils gleich, die anderen beiden ändern jeweils ihr Vorzeichen.
==> $C_1(7|-6|-9)$; $C_2(-7|6|-9)$; $C_3(-7|-6|9)$

<u>139/13</u>
a) C(0|10|5) b) F = 50 c) M(2|5|6,5) d) $S_1(0|0|10)$; $S_2(0|10|10)$
e) $4000\sqrt{5}$ N ≈ 8944 N; 10 000 N

<u>139/14</u> siehe 129/3

<u>139/15</u>
1) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB}$ berechnen
2) $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BF}$ setzen
3) Ortsvektor von D berechnen: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD}$
4) Koordinaten von D ablesen und D hinschreiben

<u>139/16</u>
a) zeige: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sind kollinear (Vielfache voneinander)
b) nachrechnen: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$



c) D(1|1,5|–0,5)
d) A, B und C liegen auf einer gemeinsamen Geraden, wenn $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ kollinear sind.

<u>139/17</u> a) S(2/3|4/3|7/3)
b) $M_c(2{,}5|0{,}5|3)$ ➔ $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ -5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SM_c} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ -5/6 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ ➔ $\overrightarrow{CS} = 2 \cdot \overrightarrow{SM_c}$ ➔ $|\overline{CS}| = 2 \cdot |\overline{SM_c}|$

<u>153/7</u> a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 5 d) 5 e) $5\sqrt{2}$ f) $5\sqrt{2}$

<u>153/8</u> a) $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>153/11</u>
Der Radius ist auch unbekannt, deshalb erhält man erst mal vier (quadratische!) Gleichungen:

$$(m_1 - 4)^2 + (m_2 + 3)^2 + (m_3 - 0)^2 = r^2$$
$$(m_1 + 1)^2 + (m_2 - 0)^2 + (m_3 + 4)^2 = r^2$$
$$(m_1 - 1)^2 + (m_2 + 4)^2 + (m_3 - 2)^2 = r^2$$
$$(m_1 - 7)^2 + (m_2 - 5)^2 + (m_3 - 5)^2 = r^2$$

Wenn man die Klammern auflöst (binomische Formeln!) und jeweils zwei Gleichungen gleichsetzt (z. B. die zweite, dritte und vierte jeweils mit der ersten), kann man das aber auf drei lineare Gleichungen reduzieren:

$$-10m_1 + 6m_2 - 8m_3 = -8$$
$$-6m_1 - 2m_2 + 4m_3 = -4$$
$$6m_1 + 16m_2 + 10m_3 = 74$$

Daraus erhält man dann schließlich M(1|3|2) (und r = 7) altes Buch Klasse 12 (winklers-Verlag):

29/2 a) $\alpha = 4{,}5;\ \beta = -\frac{2}{3}$ b) keine Lösung c) keine Lösung d) ∞ viele Lösungen: $\alpha = -2\lambda;\ \beta = \frac{1}{\lambda}$

Lambacher-Schweizer Geometrie 2 234/5

a) M(4; 4) b) M(1; 1) c) M(–2; 1) d) M(3,5; 5,5; 5) e) M(2; 3; –1,5) f) M(1,25; 0,25; 1,75)

Lambacher-Schweizer Analytische Geometrie:

119/4 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix};\quad \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix};\quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix};\quad \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix};\quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix};\quad \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\\\sqrt{5}\end{pmatrix};\quad \frac{1}{21}\begin{pmatrix}\sqrt{146}\\\sqrt{147}\\\sqrt{148}\end{pmatrix}$

119/5 $s_a = 4{,}5;\quad s_b = \sqrt{24{,}75} = 1{,}5\sqrt{11} \approx 4{,}97;\quad s_c = \sqrt{58{,}5} = 1{,}5\sqrt{26} \approx 7{,}65$

II.3 Lineare (Un)abhängigkeit

138/1 a) $r = -1;\ s = 2$ b) $r = 2;\ s = 3$

138/2 a) nein b) ja c) nein d) nein e) ja

138/3 a) keines b) komplanar c) komplanar d) komplanar

138/4 ..... Das LGS hat unendlich viele Lösungen.

138/5 a) a = 0 b) a = 1 c) nicht möglich

138/6 nein

138/7 *Annahme: Dargestellt ist ein Quader.*

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG};\quad \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{HD};\quad \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EH}$

b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{HD};$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EH};$

$\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EH}$

138/8 *gemeint ist wohl: 3 Vektoren, die alle kollinear sind?*

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ kollinear ==> es gibt Zahlen λ, μ, sodass $\vec{b} = \lambda\vec{a},\ \vec{c} = \mu\vec{a}$

==> $\vec{b}$ ist als Linearkombinaton von $\vec{a}, \vec{c}$ darstellbar und $\vec{c}$ als Linearkombinaton von $\vec{a}, \vec{b}$:

$\vec{b} = \lambda\vec{a} + 0\vec{c}$ und $\vec{c} = \mu\vec{a} + 0\vec{b}$ ==> $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind komplanar

138/9 $\begin{pmatrix}1\\6\\-2\\18\end{pmatrix} = -11\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}3\\8\\2\\9\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\4\\4\\-2\end{pmatrix}$

138/10

a) wahr (Begründung: vgl. 138/8)

b) falsch (z. B. sind die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ komplanar, aber nicht kollinear)

c) wahr (nach Definition!)

142/1 linear abhängig

142/2

a) linear unabhängig, also nicht kollinear (nicht parallel)

b) linear abhängig, also komplanar (liegen in derselben Ebene)

c) linear abhängig (liegen alle im $\mathbb{R}^3$)

142/3 linear abhängig für t = –3,4, ansonsten linear unabhängig

142/4 a) linear unabhängig b) linear unabhängig
(Rechenweg jeweils: Gleichung für $\vec{u}, \vec{v}$ hinschreiben; gegebene Zusammenhänge mit $\vec{a}, \vec{b}$ einsetzen; Klammern auflösen und zusammenfassen; lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}, \vec{b}$ ausnutzen; 2x2-LGS lösen und damit lineare Unabhängigkeit von $\vec{u}, \vec{v}$ zeigen)

142/5
a) $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}$; $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ b) linear unabhängig (Rechenweg: vgl. 142/4)

142/6 a) rot g) grün (wenn $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$) c) gelb

145/1 (unten) a) nein b) ja c) nein d) nein e) ja f) nein

145/2 a) nein b) ja c) ja

145/3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix} = -14\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

145/4 a) a = 0 b) a ∈ ℝ c) a ∈ ℝ

146/8
a) ≈ 685,4 N; ≈ 455,2 N; ≈ 250,0 N
b) S(1|10/3|10/3); ≈ 1,675 (m)

II.4 Basis und Dimension

a) Begriffe
145/3 (oben) a) k = 0 oder k = –0,5

145/5 (unten) a) k = 1,5

145/4 (oben)
Machen Sie mal. (Die Straßennamen bilden im Prinzip ein kartesisches Koordinatensystem für den $\mathbb{R}^2$ (bzw. eigentlich natürlich nur für den Ausschnitt des $\mathbb{R}^2$, der von Manhattan bedeckt wird), also hat man eine Basis für den $\mathbb{R}^2$.)

145/6
a) wahr (drei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, und bezüglich einer Basis kann man jeden Vektor des Raums darstellen)
b) falsch (das muss für *alle* Vektoren gelten, damit man eine Basis hat)
c) wahr (wegen (a))
d) wahr (denn dann ist ein Vektor als Linearkombination der anderen darstellbar)
e) falsch, sie können auch alle in derselben Ebene liegen, z. B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
f) wahr (k = l = m = 0)
g) wahr: den Nullvektor kann man immer als Linearkombination von anderen Vektoren schreiben, mit Koeffizienten = 0

Blatt (Lambacher-Schweizer Analytische Geometrie S. 61):
1) a) ja b) nein c) nein

2) a) nein b) ja c) ja d) ja

3) a) a ≠ 1,5 b) a ≠ –1 und a ≠ 2 c) kein a d) a ≠ 10

b) Koordinaten eines Vektors bezüglich einer beliebigen Basis

145/1 (oben) a) unendlich viele Lösungen b) nein 145/2 $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

145/3 b) 4,5; –3; 6 145/5 (unten) b) $-\frac{48}{7}$; $\frac{36}{7}$; $-\frac{1}{7}$

146/7

a) rechnerisch zeigen: $\left|\overrightarrow{D_1D_3}\right| = \left|\overrightarrow{D_1G_2}\right| = \left|\overrightarrow{D_3G_2}\right| \left(= 3\sqrt{2}\right)$ ==> Das Dreieck ist gleichseitig, also natürlich auch gleichschenklig.

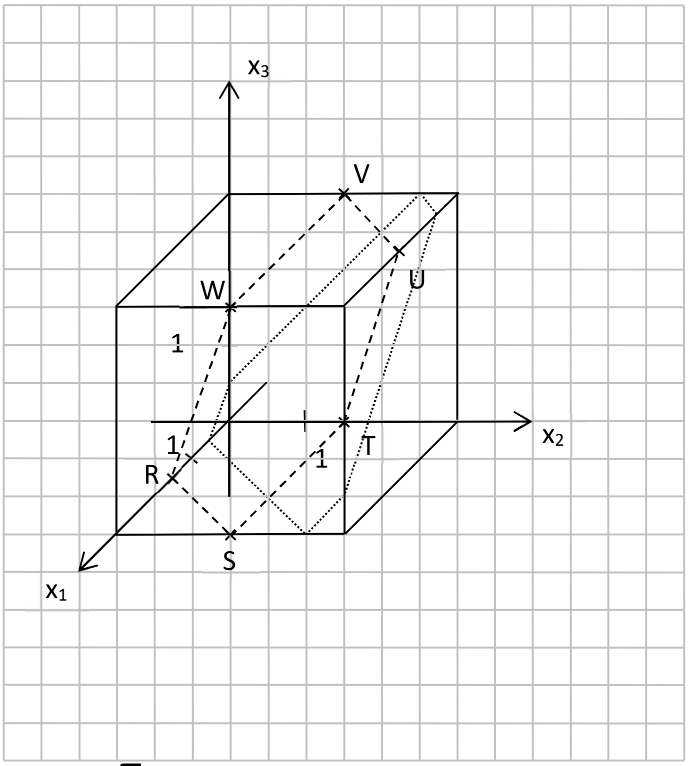
b) $4{,}5\sqrt{3}$ c) 4,5, das sind $16{,}\overline{6}$% des Würfelvolumens

d) A(3|0|2); B(1|0|0); C(0|1|0); D(0|3|2); E(1|3|3); F(3|1|3)

e) $\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{DE}$

f) unendlich viele Lösungen ==> Die Vektoren sind linear abhängig. ==> Die Punkte B,C,D,E liegen in derselben Ebene.

g, i) U(1,5|3|3); V(0|1,5|3); W(0|0|1,5)



h) $6{,}75\sqrt{3}$ j) $\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{6}$; 0 bzw. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 0 bzw. $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$

II.5 Das Skalarprodukt

a) Begriff und Rechengesetze

153/3 a) V b) n.d. c) Z d) V e) Z

153/4

Wenn Vektoren kollinear sind, dann ist der Winkel α zwischen ihnen entweder 0° oder 180°. In beiden Fällen ist |cos α| = 1. Mit der Formel für das Skalarprodukt folgt dann sofort die Behauptung.

153/8 a) + b) + c) 0 d) – e) –

Übungsblatt:

1) a) 25 bzw. 5 b) 25 bzw. 5 c) 6 bzw. $\sqrt{6}$ d) $2\,(a^2 + 2ab + b^2) = 2\,(a + b)^2$ bzw. $\sqrt{2}\;|a + b|$

2) a) $\vec{p} \circ \vec{q} = 0$ b) $|\vec{p} \circ \vec{q}| = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$ c) $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 0$ d) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0$
e) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$ und $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ und $\overrightarrow{CB} \circ \overrightarrow{CD} = 0$ f) (e) und zusätzlich $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BC}^2$

3) a) $6\vec{a}^2 + 11\vec{a} \circ \vec{b} - 35\vec{b}^2$ b) $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + 2\vec{a} \circ \vec{c} + 2\vec{b} \circ \vec{c}$
c) $2\vec{a}^2 - 3\vec{b}^2 + \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$ d) $3\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 10\vec{c}^2 - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} + 9\vec{b} \circ \vec{c}$
e) $2(\vec{a} \circ \vec{b})(\vec{b} \circ \vec{c})$ f) $(\vec{a} \circ \vec{b})\vec{c}^2 + 2(\vec{a} \circ \vec{b})(\vec{b} \circ \vec{c})(\vec{a} \circ \vec{c}) + (\vec{b} \circ \vec{c})\vec{a}^2$

4) a) 1 b) r c) –1 d) 2 e) r + s 5) a) 0 b) 1 c) 0 d) 13 6) 1; $\vec{a}_0$; 1; $\vec{a}_0$; 1

b) Berechnung aus den Komponenten
153/1 a) –12 b) –38 c) 14

153/2 ... das Skalarprodukt gegeben ist durch $6 \cdot 12 + 0 \cdot 3 + (-8) \cdot 4 = 40$.

153/5
a) z. B. für $\vec{a} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt die linke Seite $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, die rechte aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
b) $\vec{a}$ und $\vec{c}$ haben im Allgemeinen verschiedene Richtungen, können also im Allgemeinen keine Vielfachen voneinander sein.

153/11 a) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ b) $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$

156/2 a) gelb

Übungsblatt:

7) a) –3 b) 3 c) –6 d) 8 8) $-3\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{0}$; $3\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) Anwendungen

156oben/1 a) ≈ 178,2° b) ≈ 20,0°

156oben/2 a) ≈ 81,9°; ≈ 37,9°; ≈ 60,3° b) ≈ 142,0°; ≈ 16,3°; ≈ 21,7°

156oben/3 a) nein b) ja c) ja d) nein e) ja

156oben/4 $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \cdots = 0$

156oben/5 jeweils z. B.; Nachweis jeweils mittels „Skalarprodukt = 0"
$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$;
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

156oben/6
Die Koordinaten von $\vec{b}$ müssen die Gleichung $b_1 + b_2 = |\vec{b}|$ erfüllen. Mögliche Lösungen:
z. B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

156oben/7 $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54{,}7°$

156unten/1 a) 6; $\approx 60{,}1°$ b) 65; $\approx 21{,}0°$ c) −21; $\approx 126{,}0°$

156unten/2 b) rot

156unten/3 ***Hier muss vorausgesetzt werden, dass $\vec{n} \neq \vec{0}$ ist!***
zeichnerische Begründung: Wenn die Vektoren alle senkrecht zu einem gegebenen Vektor $\vec{n}$ stehen, dann haben sie sicher Repräsentanten, die in derselben Ebene liegen. Also sind sie komplanar, also sind sie linear abhängig.

Rechnerisch: Wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ alle orthogonal zu $\vec{n}$ sind, gilt für die Koordinaten von $\vec{n}$ das LGS

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0 \quad \text{I}$$
$$n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 = 0 \quad \text{II}$$
$$n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3 = 0 \quad \text{III},$$

in Matrixform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{array}\right)$$

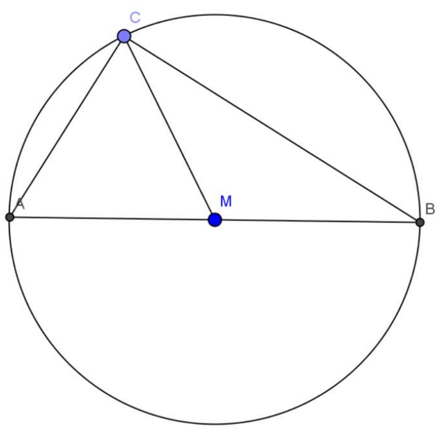
Dieses LGS hat sicher die Lösung $\vec{n} = \vec{0}$, das widerspricht aber der Voraussetzung. Also muss das LGS noch andere Lösungen haben, sprich: es hat unendlich viele Lösungen. Durch Addition von Vielfachen der Gleichungen zueinander muss es also möglich sein, eine Nullzeile zu erhalten. Also muss gelten: Es gibt Zahlen r, s, t, die nicht alle = 0 sind, sodass

$$r a_1 + s b_1 + t c_1 = 0 \quad \text{und}$$
$$r a_2 + s b_2 + t c_2 = 0 \quad \text{und}$$
$$r a_3 + s b_3 + t c_3 = 0 \quad \text{gilt,}$$

sprich: $r\,\vec{a} + s\,\vec{b} + t\,\vec{c} = \vec{0}$. Nach Definition sind dann $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig.

156unten/4
Kanten unten: $\approx 65{,}9°$; Kanten an der Spitze: $\approx 48{,}2°$; Kanten zur Grundfläche: $\approx 54{,}7°$

156unten/5 Hier wird der Satz des Thales bewiesen.



M ist Umkreismittelpunkt ==> $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$
$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ==> $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$
quadrieren ==> $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$ ==> $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = 0$
==> $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \circ \overrightarrow{BC} = 0$ ==> $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ ==> $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 0$
==> rechter Winkel bei C

156unten/6 Nein, die Grundfläche ist zu klein.

Übungsblatt:

9) a) –1 b) $\frac{2}{3}$ c) –4

10)

a) $\alpha \approx 160{,}5°$; $\beta \approx 8{,}0°$; $\gamma \approx 11{,}4°$ b) $\alpha \approx 49{,}7°$; $\beta \approx 106{,}9°$; $\gamma \approx 23{,}5°$ c) $\alpha \approx 38{,}4°$; $\beta \approx 84{,}2°$; $\gamma \approx 57{,}4°$

11) a) $r_c = 0{,}18$; $F_c(1{,}18;\ 3{,}26)$; $r_a = \frac{41}{61}$; $F_a(\approx -2{,}03;\ \approx 5{,}64)$; $r_b = \frac{20}{29}$; $F_b(\approx -0{,}55;\ \approx 2{,}62)$

b) $r_c = \frac{20}{38}$; $F_c(\approx 7{,}16;\ \approx 2{,}53;\ \approx -0{,}47)$; $r_a = \frac{3}{7}$; $F_a(\approx 8{,}29;\ \approx 5{,}13;\ \approx 0{,}43)$; $r_b = \frac{6}{11}$;

$F_b(\approx 4{,}91;\ \approx 4{,}74;\ \approx -0{,}09)$

II.6 Das Vektorprodukt

a) Begriff und Rechenregeln

162/1

a) $\begin{pmatrix} -13 \\ -26 \\ 26 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 13 \\ 26 \\ -26 \end{pmatrix}$; $\sqrt{65}$; $\sqrt{26}$; 39

b) $\begin{pmatrix} -80 \\ -86 \\ -107 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 80 \\ 86 \\ 107 \end{pmatrix}$; $\sqrt{134}$; $3\sqrt{21}$; $3\sqrt{2805}$

c) $\begin{pmatrix} 22 \\ -20 \\ -81 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -22 \\ 20 \\ 81 \end{pmatrix}$; 13; $3\sqrt{6}$; $\sqrt{7445}$

d) $\begin{pmatrix} 96 \\ -54 \\ 24 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -96 \\ 54 \\ -24 \end{pmatrix}$; $\sqrt{109}$; $3\sqrt{17}$; $6\sqrt{353}$

162/2 $\vec{0}$; $\vec{0}$

162/4 Stures Nachrechnen, viel Spaß!

z. B. ist $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \cdots = \begin{pmatrix} -a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 \\ a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 - a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 \\ a_1b_2c_1 + a_2b_3c_2 - a_3b_1c_1 - a_3b_2c_2 \end{pmatrix}$ .... usw.

167/9

a) falsch; sieht man schon am einfachen Beispiel $r = 2, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(richtig ist $r\ (\vec{u} \times \vec{v}) = (r\,\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (r\ \vec{v})$)

b) falsch; sieht man schon am einfachen Beispiel $r = s = 1, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c,d) richtig; folgt beides mit Distributiv- und Anti-Kommutativgesetz

167/10

a) $a = \frac{11}{6}$; $b = \frac{11}{3}$; $c = -\frac{23}{18}$ b) $a = -2$; $b = 2$; $c = -2$ oder $a = 1$; $b = -1$; $c = 1$

168/1 a) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$ b) hier ist $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; wähle z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

168/2 $\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix}-10\\4\\12\end{pmatrix}$

168/8 parallel zu $\begin{pmatrix}3\\0\\16\end{pmatrix}$

168/11 $\vec{v} \parallel \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

168/10
a) Beim Kreuzprodukt gilt ein Anti-Kommutativgesetz, nicht das übliche Kommutativgesetz.
b) Links steht in der Klammer ein Skalar, mit dem kann man kein Kreuzprodukt berechnen. Außerdem wurde hier anscheinend das Assoziativgesetz der Multiplikation mit dem Distribu-tivgesetz durcheinander- gebracht.
c,f) siehe (a)
d) Links steht ein Vektor, rechts ein Skalar, das kann unmöglich gleich sein.
e) ??? Wie kommt man darauf? Ergibt keinerlei Sinn, wieso sollte das gleich sein?

altes Buch 12. Klasse (winklers-Verlag):
47/3 $a_3 = 7$; $b_3 = -6$

47/4 $b_1 = 14$ oder $b_1 = -17{,}5$

b) Anwendungen
162/3 a) nicht kollinear b) kollinear
$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{0}$ gilt genau dann, wenn $\vec{r}, \vec{s}$ kollinear sind.

167/1
F = $\frac{\sqrt{769}}{2} \approx 13{,}87$; $a = \sqrt{41} \approx 6{,}40$; $b = \sqrt{34} \approx 5{,}83$; $c = 5$;
$h_a = \sqrt{\frac{769}{41}} \approx 4{,}33$; $h_b = \sqrt{\frac{769}{34}} \approx 4{,}76$; $h_c = \frac{\sqrt{769}}{5} \approx 5{,}55$

167/3 $O \approx 27{,}80$

167/8 a) F = 50 b) V = 3,36

168/3 $\vec{a}, \vec{b}$ parallel ==> $\sin\alpha = 0$ ==> $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ ==> $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

168/6 15 (m^2); $\sqrt{122} \approx 11{,}05$ (m); $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ (m)

altes Buch 12. Klasse (winklers-Verlag):
47/6 a) $a_1 = 4$ oder $a_1 = 2$ b) $b_1 = -1$ oder $b_1 = -8{,}2$

II.7 Das Spatprodukt

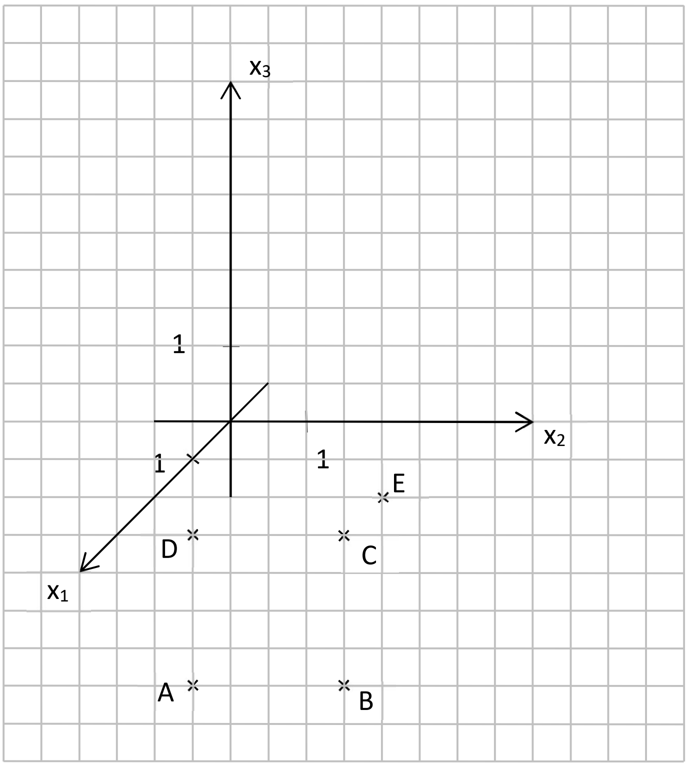
167/2
a) V = 115
b) Dann liegen alle drei Vektoren in derselben Ebene (nämlich der x_1-x_2-Ebene), sind also komplanar, also ergibt das Spatprodukt 0 – völlig unabhängig davon, welche Werte die ersten beiden Koordinaten von $\vec{c}$ haben.
Eventuell Fehler in Aufgabenstellung? Es könnte gemeint sein, dass nur bei den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ jeweils die dritte Koordinate gleich null ist, nicht aber bei $\vec{c}$, dann wird die Aufgabe etwas komplexer (und interessanter): Dann liegen nur $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der x_1-x_2-Ebene, $\vec{c}$ aber nicht. Daraus folgt aber, dass $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht zur x_1-x_2-Ebene steht, also nur eine dritte Koordinate haben kann, die ersten beiden Koordinaten müssen gleich 0 sein. Und daraus folgt wiederum mit der Formel für das Vektorprodukt, dass das Spatprodukt nur von der dritten Koordinate von $\vec{c}$ abhängt, also von den ersten beiden Koordinaten unabhängig ist.
c) Stures Nachrechnen mit den Formeln aus der Definition von Vektor- und Skalarprodukt. Viel Spaß.

(oder anschaulich geometrisch begründen über das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats)
d) Das Spatprodukt ist genau dann gleich 0, wenn das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Spats gleich 0 ist. Das kann nur dann sein, wenn die Grundfläche und/oder die Höhe gleich 0 ist. (1) Die Grundfläche kann nur dann gleich 0 sein, wenn das Parallelogramm den Flächeninhalt 0 hat, und das kann nur dann sein, wenn $\vec{a}, \vec{b}$ kollinear sind – dann sind aber $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar. (2) Die Höhe kann nur dann gleich 0 sein, wenn $\vec{c}$ in derselben Ebene liegt wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ – dann sind aber $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar.
Man könnte das übrigens auch rechnerisch überprüfen mit der Definition der Komplanarität… Machen Sie mal.

<u>167/3</u> V = 0,5; $O \approx 27{,}80$

<u>167/4</u> *siehe S. 166*

<u>167/5</u> V = 4 (kann man auch ohne Spatprodukt berechnen: mit der Zeichnung sieht man G = 4, h = 3)



<u>167/6</u> V = $\frac{64}{3}$

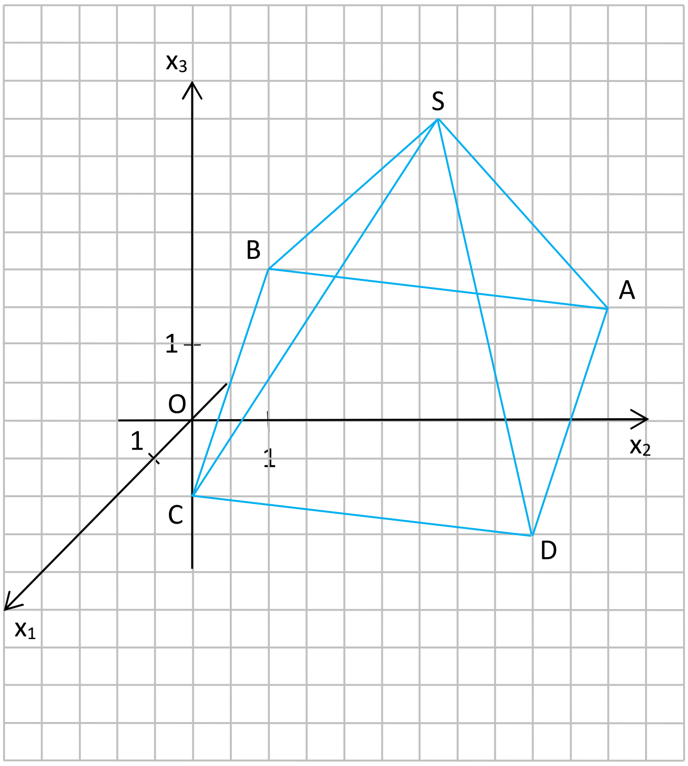
<u>167/7</u> $k = \pm 1{,}5$

<u>168/4</u> a) Spatprodukt = 0; linear abhängig b) Spatprodukt = –18; linear unabhängig
Merksatz: vgl. 167/2d

<u>168/5</u> V = 45; h = 11,25
Beachte: Damit man die Formel $V = \frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}\right|$ anwenden darf, muss man hier erst mal zeigen, dass ABCD überhaupt ein Parallelogramm ist! (z. B. indem man nachrechnet, dass $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ist)
Skizze: nächste Seite

<u>168/7</u> a) sinnlos b) f c) w d) nicht entscheidbar e) w

<u>168/9</u> G = 25; $F_{Seite} = 2{,}5\sqrt{31{,}25} \approx 13{,}98$; V = $\frac{125}{3}$



x_3
S
B
A
1
O
1
1
x_2
C
D
x_1