I.1 Grundlagen

Blatt 49

a) $D = R\backslash\{3\}$; $x_1 = \frac{2}{3} \in D$ b) $D = R\backslash\{0; 2\}$; $x_1 = 1{,}5 \in D$

c) $D = R\backslash\{0; 3\}$; $x_1 = -1{,}5 \in D$ (; $x_2 = 3 \notin D$) d) $D = R\backslash\{2; -1\}$; $x_1 = -\frac{4}{3} \in D$ (; $x_2 = 2 \notin D$)

Lösen von Bruchgleichungen:

Blatt 100/9 a) L = {} b) L = {–3} c) L = {} d) L = {} e) L = {} f) $L = \mathbb{R}\backslash\{0; -1\}$

Lösen von Bruchungleichungen:

Blatt 45/2

a)]–4;1[b)]–3;1[c) $]-\infty;-2[\cup [6;\infty[$ d)]–4;–3] e) $]-\infty; 1] \cup]3; \infty[$ f) $]-8; -2{,}5[$

I.2 Verhalten an Definitionslücken

21/1 f_2; f_3; f_5

21/2 f_1; f_3; f_4

21/3 z.B.! $f_1(x) = \frac{x^2}{x^2}$; $f_2(x) = \frac{x}{x}$; $f_3(x) = \frac{x\cdot(x+1)^2}{(x+1)^2}$

21/5 a) gelb, grün

Blatt 53/1

a) $D = R\backslash\{1\}$; $x_1 = 1$ ist Pol 1. Ordnung

b) $D = R\backslash\{\pm 2\}$; $x_1 = 2$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = -2$ ist SHD

c) $D = R\backslash\{-3;-4\}$; $x_1 = -3$ und $x_2 = -4$ sind Pole 1. Ordnung

d) $D = R\backslash\{0;3\}$; $x_1 = 0$ ist SHD; $x_2 = 3$ ist Pol 1. Ordnung

e) $D = R\backslash\{0{,}5;-4\}$; $x_1 = 0{,}5$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = -4$ ist SHD

f) $D = R\backslash\{0; 2\}$; $x_1 = 0$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = 2$ ist SHD

I.3 Asymptoten

21/4

a) $D_g = \mathbb{R}\{-1; 2\}$

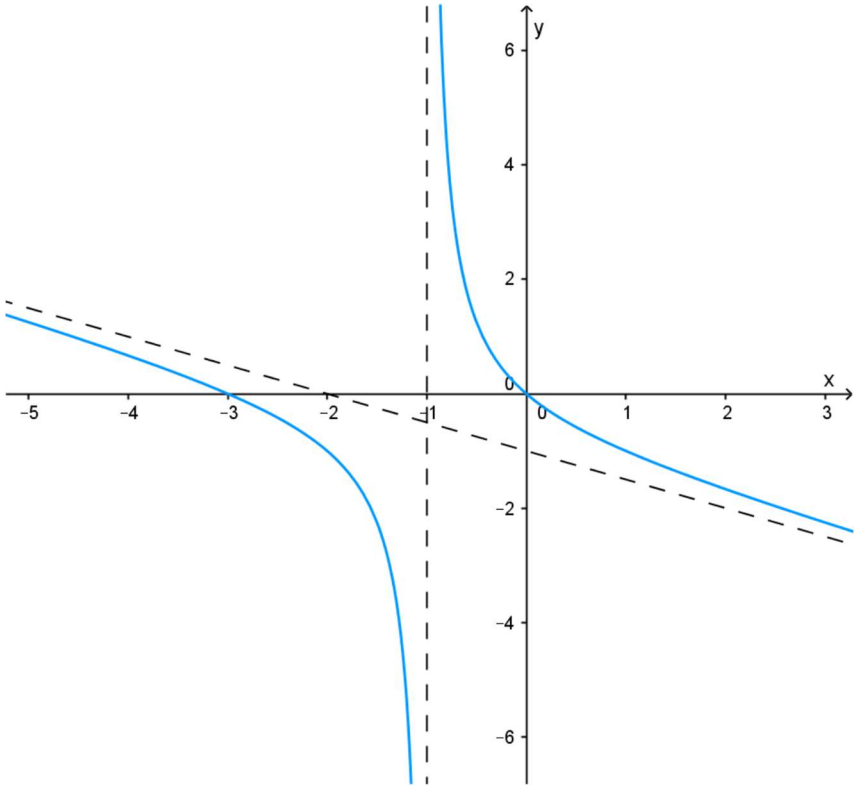
b) $x_1 = -1$ ist Polstelle 1. Ordnung (mit VZW); $x_2 = 2$ ist SHD

Nullst.: $x_1 = 0$; $x_2 = -3$

c) s. As.: $x = -1$; sch. As.: $y = -\frac{1}{2}x - 1$

d)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	–0,75	–1,25
g(x)	2/3	0	–1	n.d.	0	–1	n.d.	–2,25	3,375	–4,375



e) $\bar{g}(x) = -\frac{x^2+3x}{2x+2}$

<u>21/5</u> b) grün

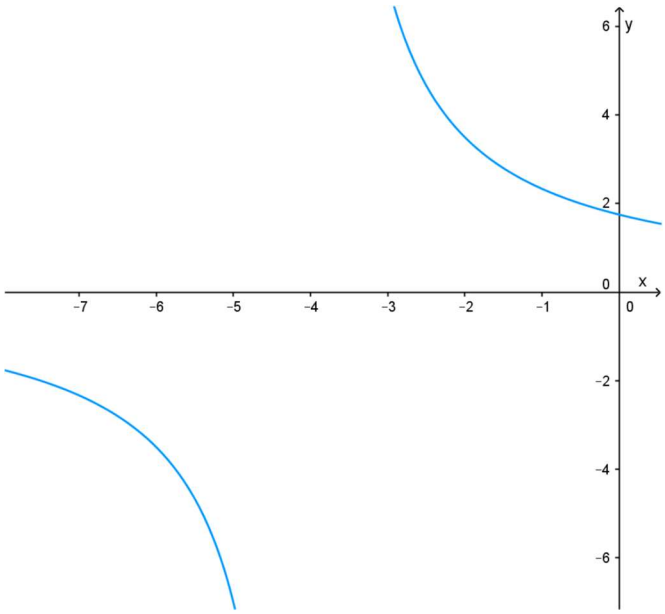
<u>21/6</u>

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu P$(-4|0)$)

$x_1 = -4$ ist Polstelle 1. Ordnung (mit VZW); s. As.: $x = -4$; w. As.: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

$S_y(0|1{,}75)$; keine N



b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu P$(-1|4)$)

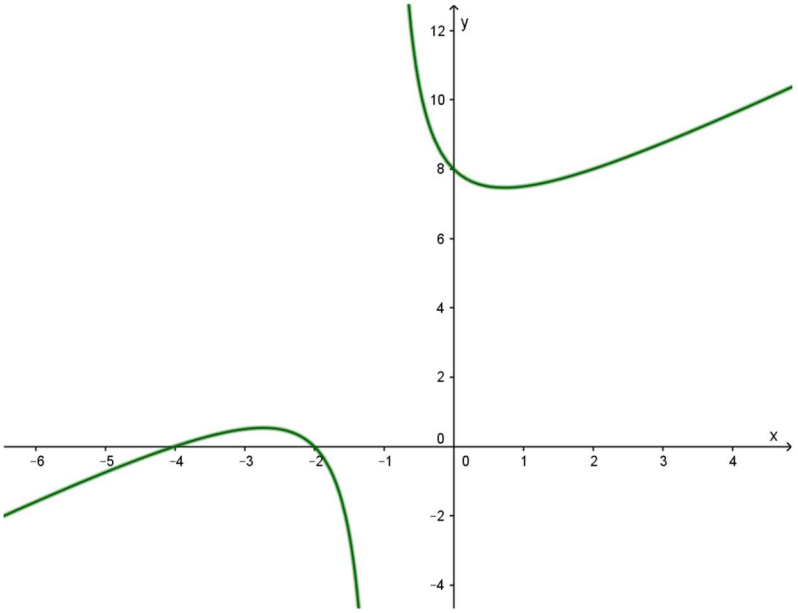
$x_1 = -1$ ist Polstelle 1. Ordnung (mit VZW)

s. As.: $x = -4$; sch. As.: $y = x + 5$

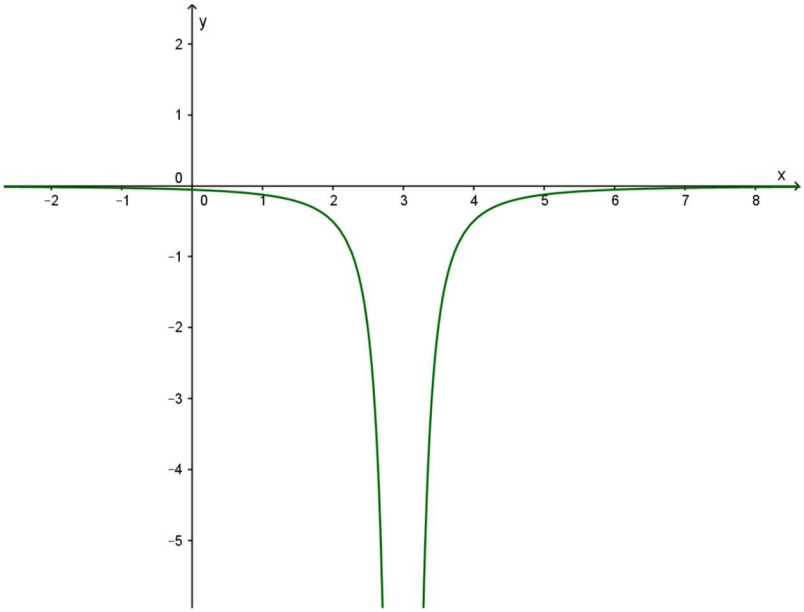
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+5)) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x+5)) = 0^+$

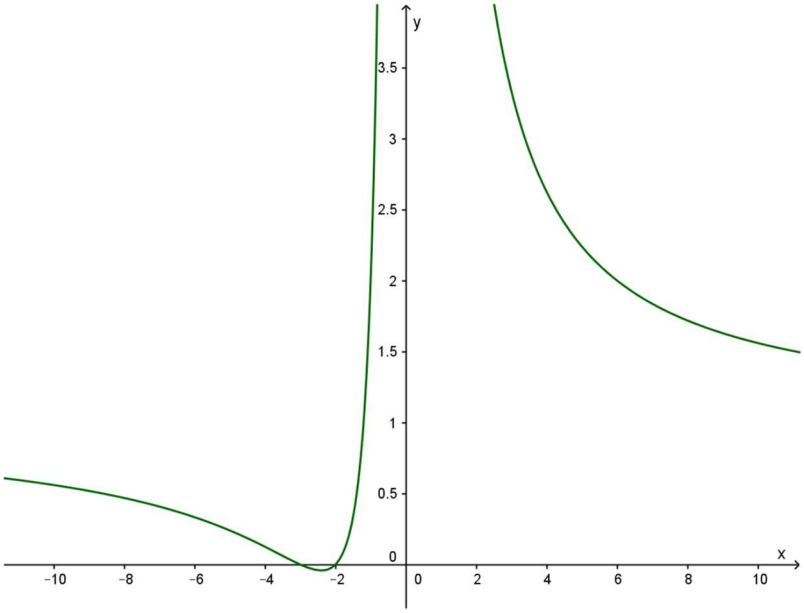
$S_y(0|8)$; $N_1(-4|0)$, $N_2(-2|0)$



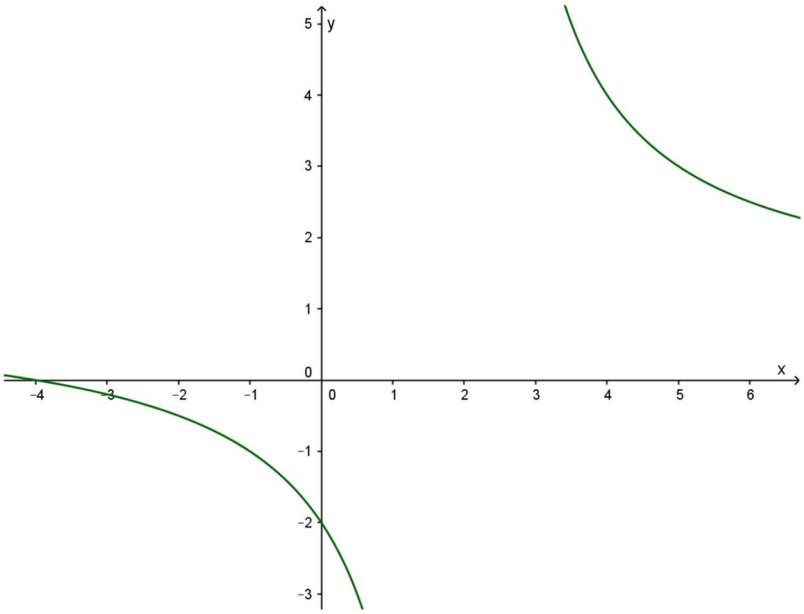
c) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu x = 3)
$x_{1,2} = 3$ ist Polstelle 2. Ordnung (ohne VZW)
s. As.: $x = 3$; w. As.: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^-$
kein S_y; keine N



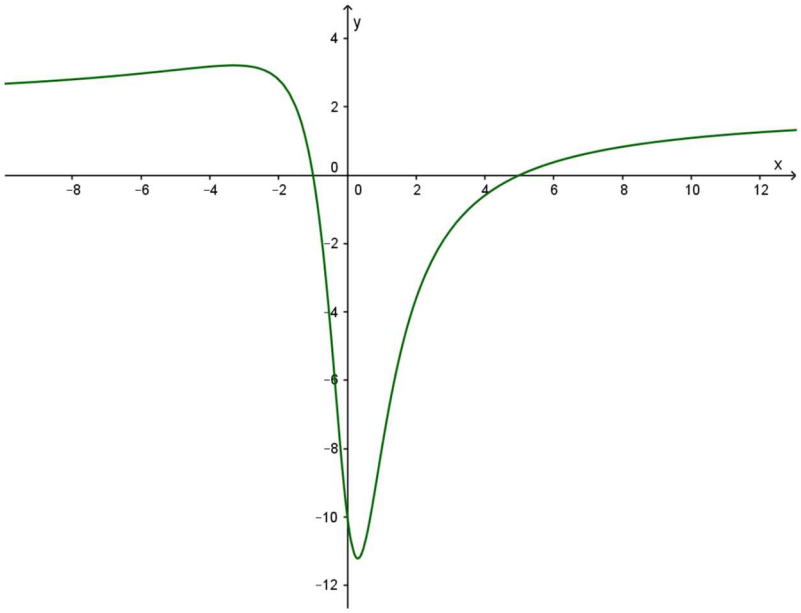
d) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; keine Symmetrie zum KS
$x_{1,2} = 0$ ist Polstelle 2. Ordnung (ohne VZW)
s. As.: $x = 0$; w. As.: $y = 1$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1^-$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1^+$
kein S_y; $N_1(-3|0)$, $N_2(-2|0)$



e) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu $P(2|1)$)
$x_1 = 2$ ist Polstelle 1. Ordnung (mit VZW)
s. As.: $x = 2$; w. As.: $y = 1$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1^-$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1^+$
$S_y(0|-2)$; $N(-4|0)$



f) $D_f = \mathbb{R}$; keine Symmetrie zum KS
keine Definitionslücken
w. As.: $y = 2$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2^-$
$S_y(0|-10)$; $N_1(-1|0)$, $N_2(5|0)$



21/7 z. B. $x^3 - 9x + 1$ oder $x^3 - 9x - 5$

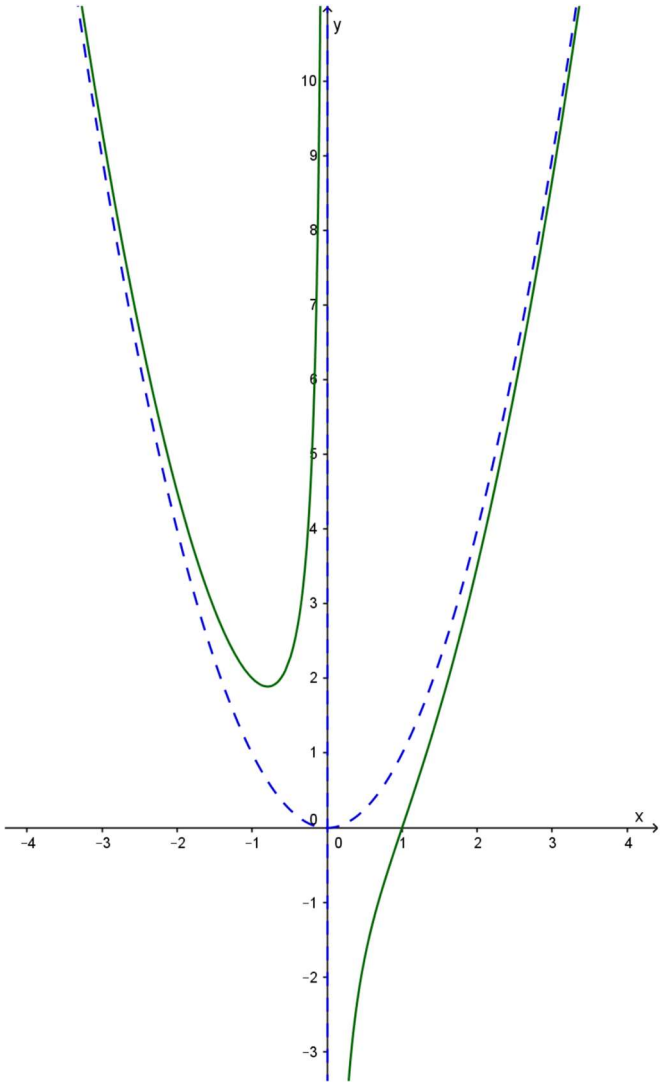
21/8

a) s. As.: x = 0

b) Polynomdivision ist unnötig; Bruchrechnen!

$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ ==> Asymptotenkurve: $y = x^2$

c)



27/1 1k, 2l, 3m, 4b, 5e, 6d, 7g, 8h, 9c, 10i, 11a, 12f

28/2

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1; 5\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu (3|0))

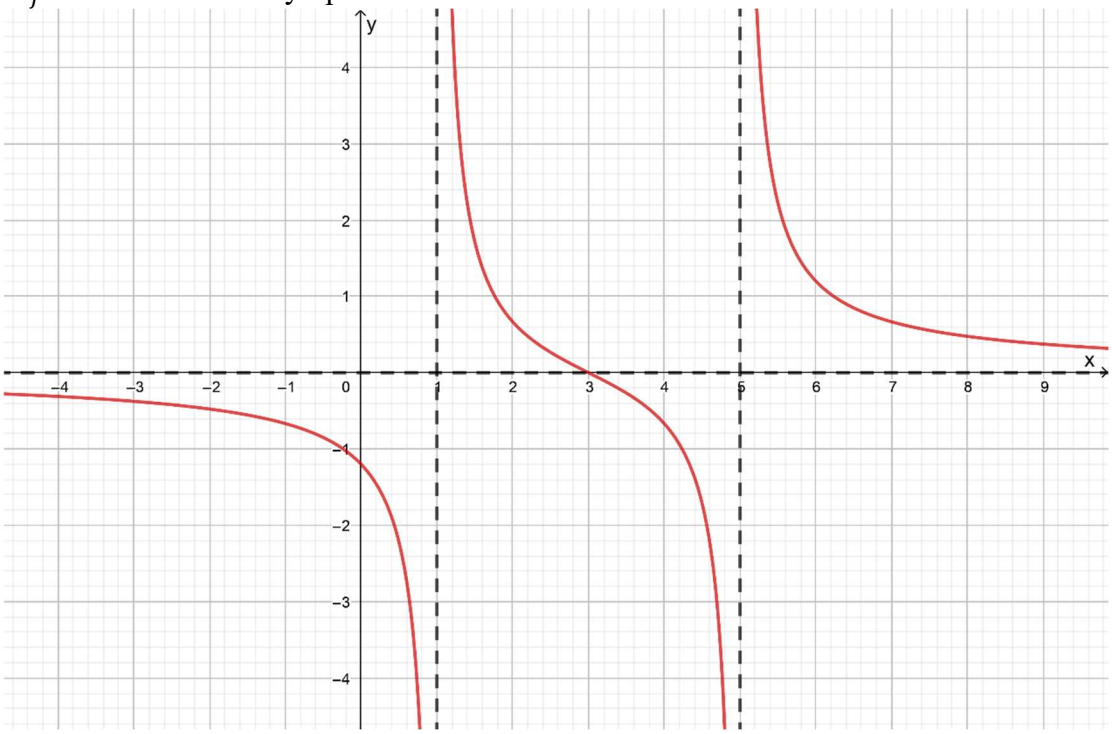
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|-1{,}2)$; $x_1 = 3$ einfach

$x_1 = 1$; $x_2 = 5$ Pole 1. Ordnung

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben



b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu (1|–2,5))

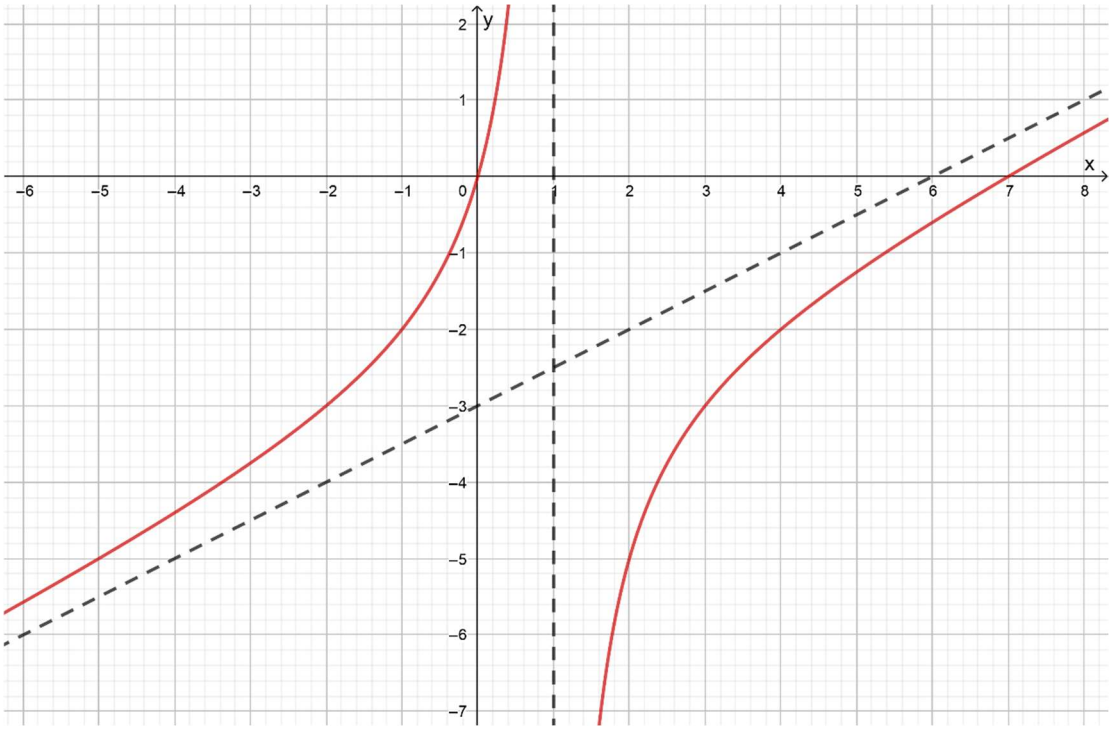
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

$S_y(0|0)$; $x_1 = 0$; $x_2 = 7$ beide einfach

$x_1 = 1$ Pol 1. Ordnung

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten



c) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu (1|–2,5))

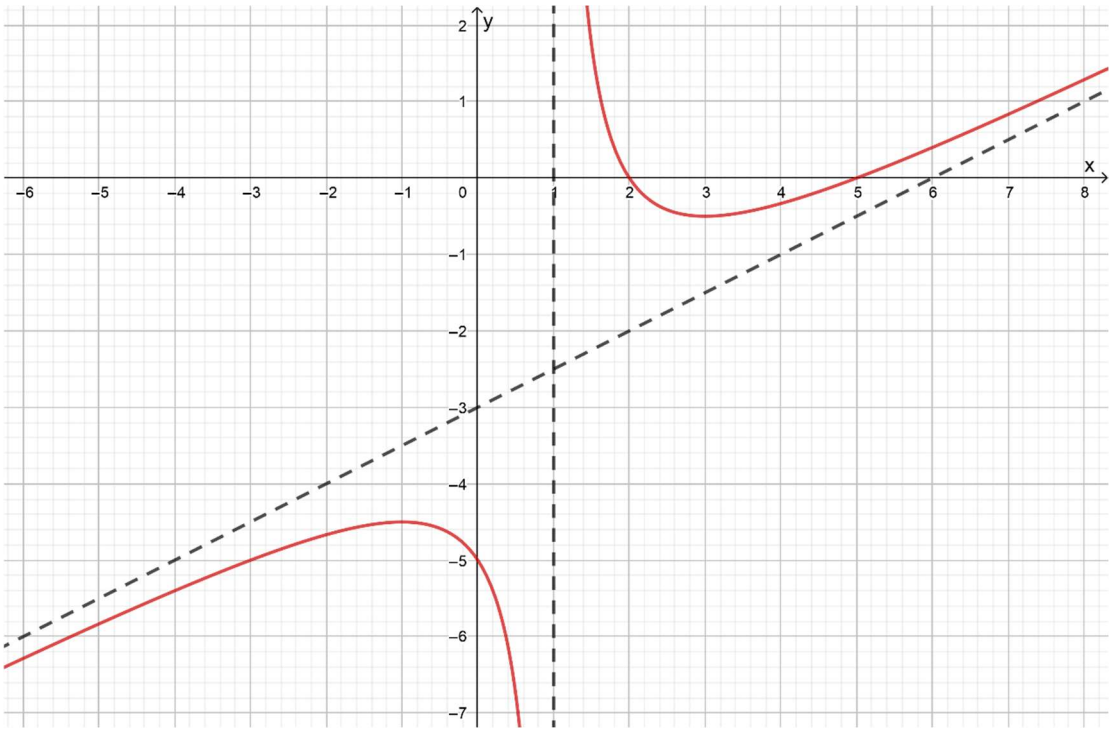
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|{-5})$; $x_1 = 2$; $x_2 = 5$ einfach

$x_1 = 1$ Pol 1. Ordnung

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben



d) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu (–2|4))

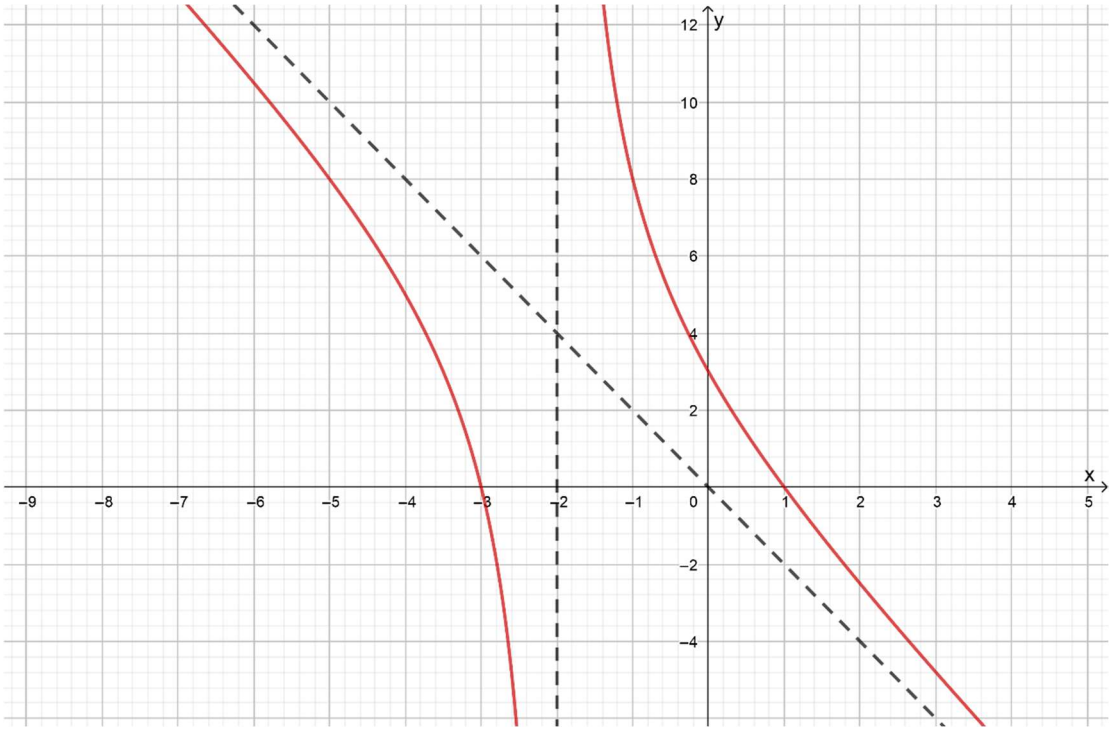
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|3)$; $x_1 = -3$; $x_2 = 1$ beide einfach

$x_1 = -2$ Pol 1. Ordnung

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben



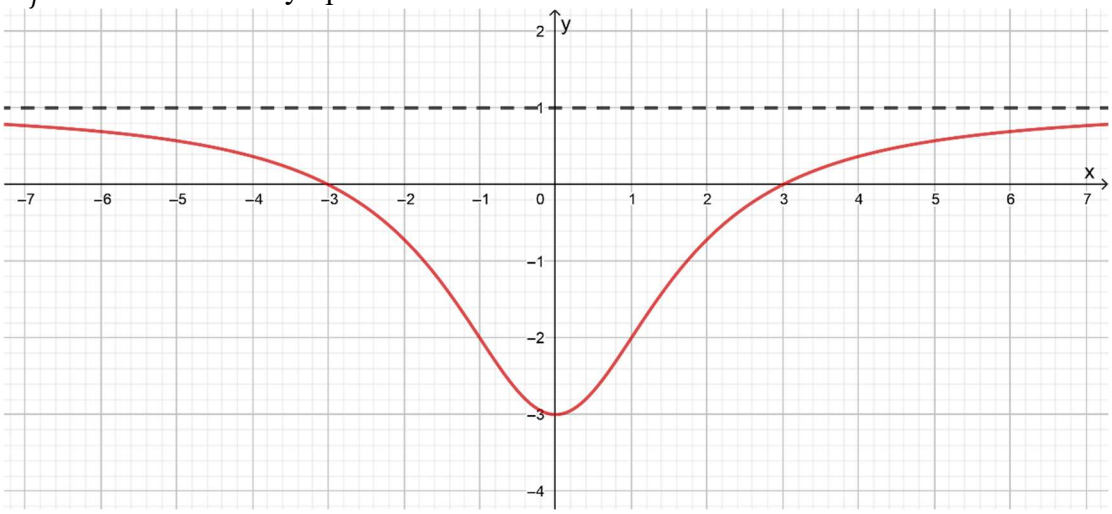
e) $D_f = \mathbb{R}$; Symmetrie zur y-Achse

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

$S_y(0|{-3})$; $x_{1,2} = \pm 3$ beide einfach

keine Definitionslücken

$x \to \pm\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten



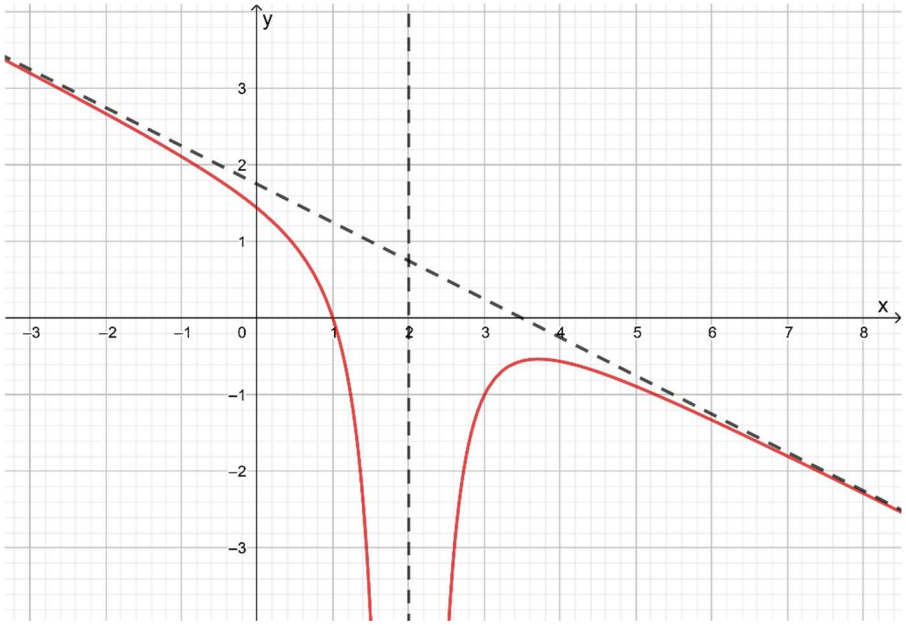
f) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; keine Symmetrie zum KS

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$; $\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = -\infty$

$S_y(0|1{,}4375)$; $x_1 = 1$ einfach

$x_{1,2} = 2$ Pol 2. Ordnung

$x \to \pm\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten



g) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1 \pm \sqrt{5}\}$; keine Symmetrie zum KS

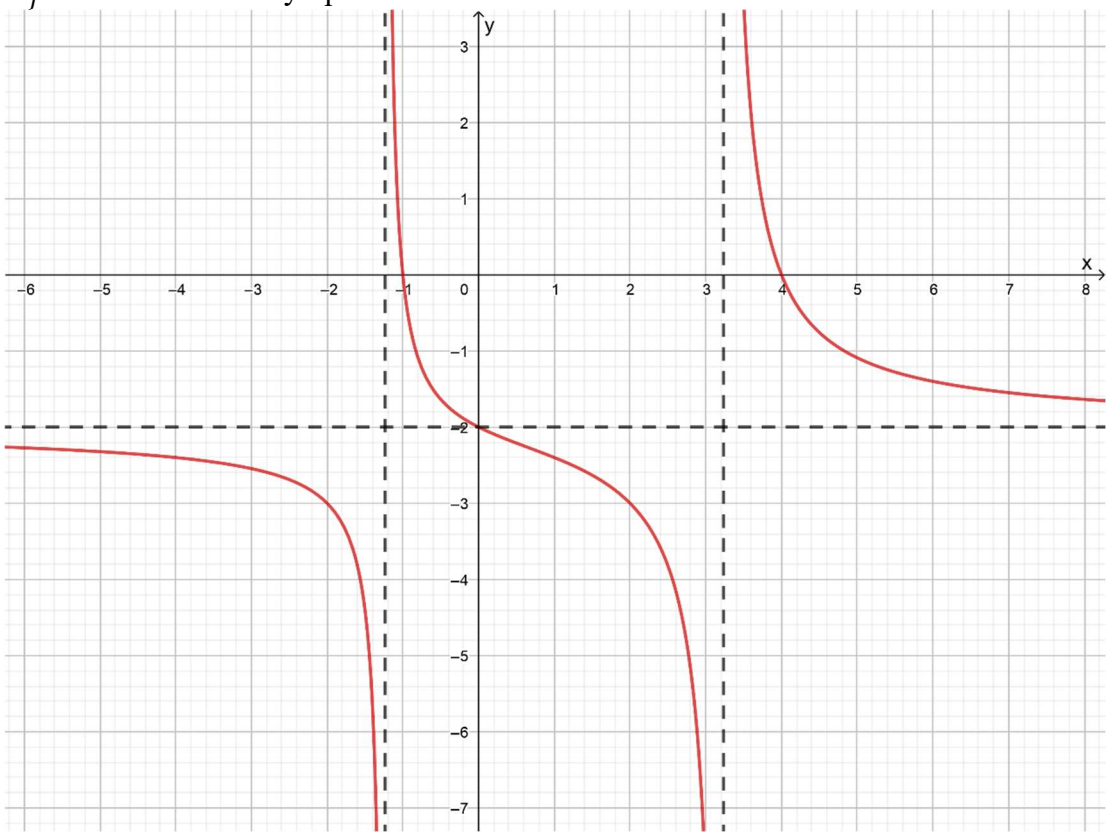
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x\to 1-\sqrt{5}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+\sqrt{5}^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-\sqrt{5}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+\sqrt{5}^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|{-2})$; $x_1 = -1$; $x_2 = 4$ beide einfach

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$ Pole 1. Ordnung

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben



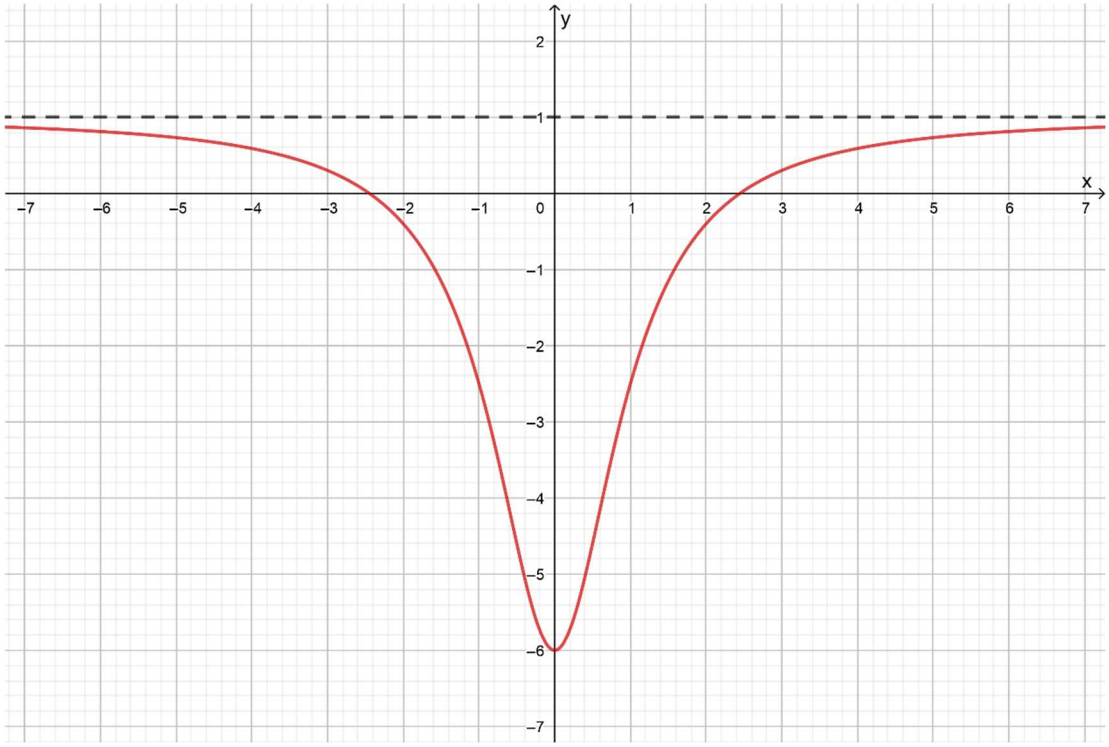
h) $D_f = \mathbb{R}$; Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

$S_y(0|{-6})$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$ beide einfach

keine Definitionslücken

$x \to \pm\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten



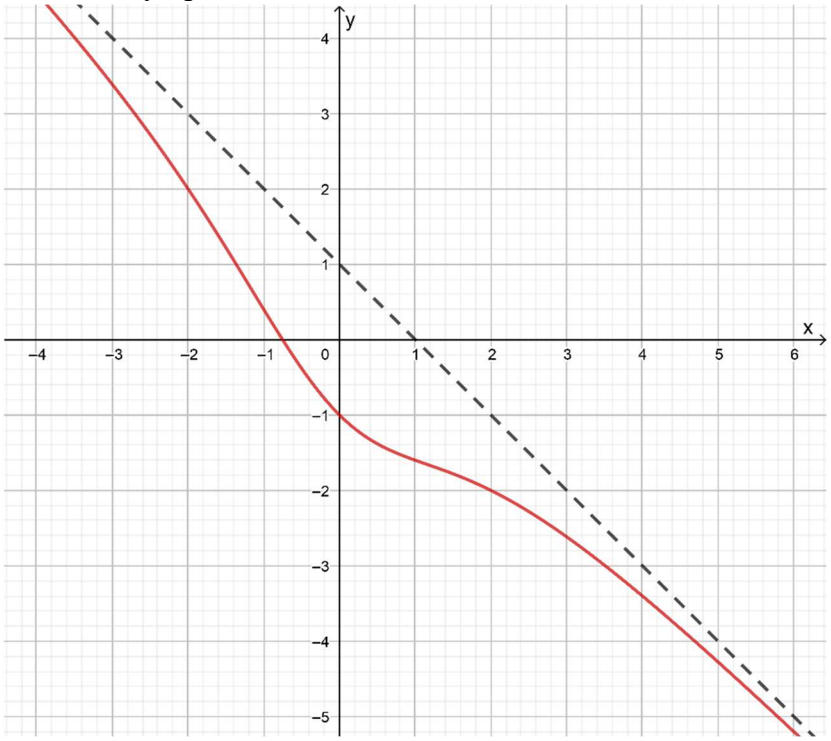
i) $D_f = \mathbb{R}$; keine Symmetrie zum KS

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$

$S_y(0|{-1})$; $x_1 \approx -0{,}8$ einfach (durch Probieren???)

keine Definitionslücken

$x \to \pm\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten



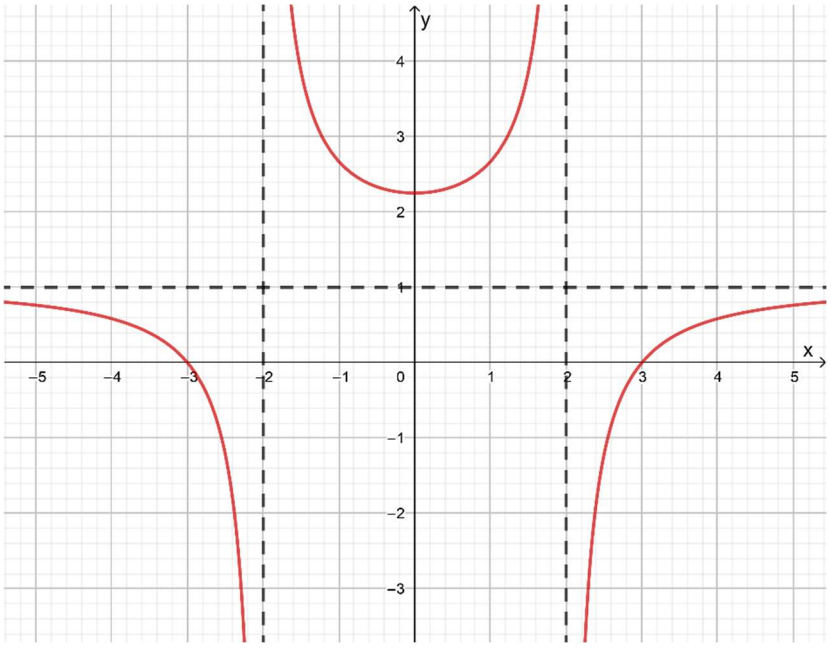
j) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$; Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$S_y(0|2{,}25)$; $x_{1,2} = \pm 3$ beide einfach

$x_{1,2} = \pm 2$ Pole 1. Ordnung

$x \to \pm\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten



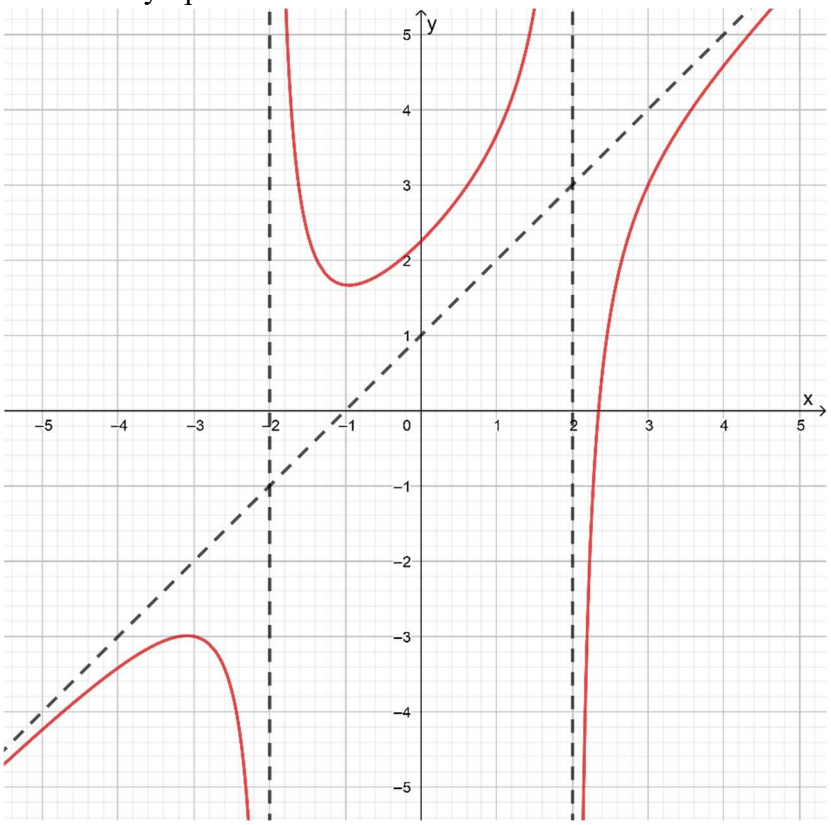
k) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$; keine Symmetrie zum KS

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$S_y(0|2{,}25)$; $x_1 \approx 2{,}4$ einfach (durch Probieren???)

$x_{1,2} = \pm 2$ Pole 1. Ordnung

$x \to \pm\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten



l) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$; Symmetrie zum Ursprung

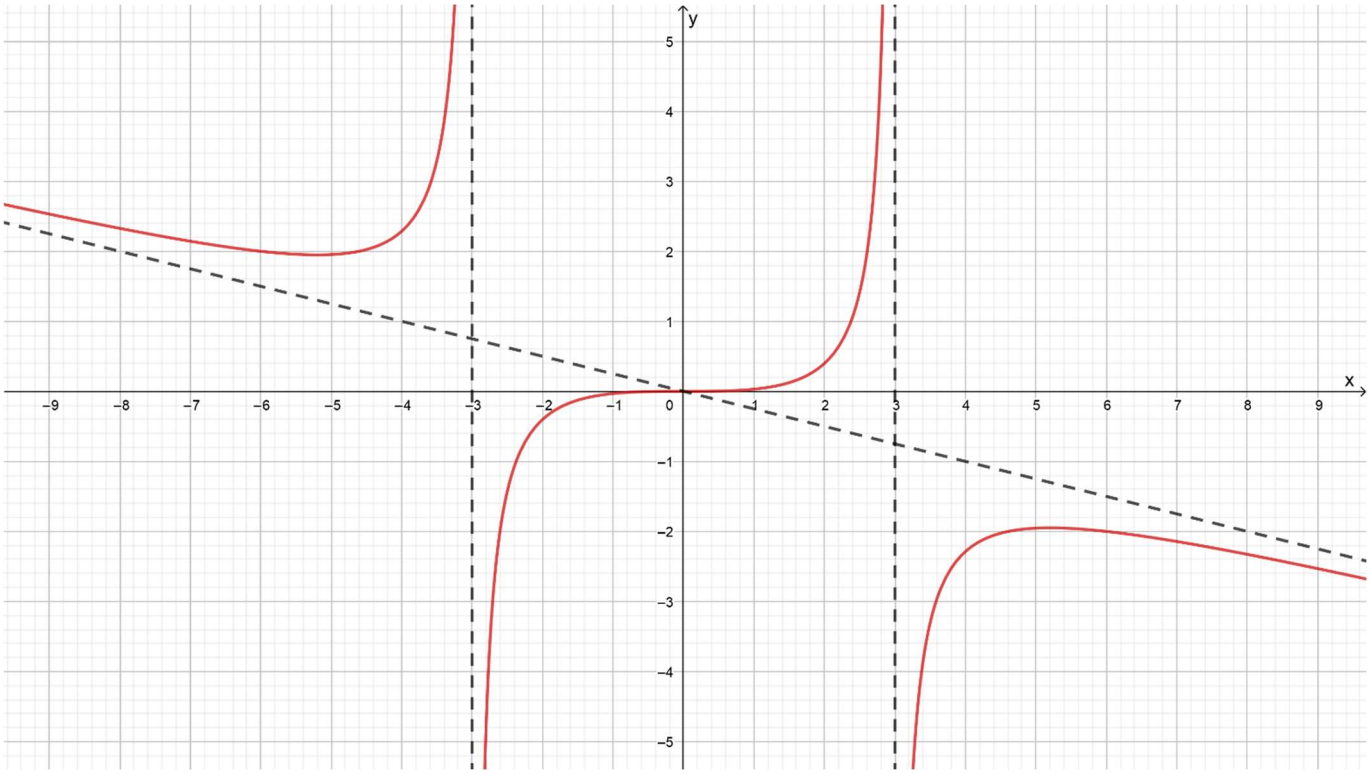
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$

$S_y(0|0)$; $x_{1,2,3} = 0$ dreifach

$x_{1,2} = \pm 3$ Pole 1. Ordnung

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten



m) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 5\}$; Symmetrie zum Ursprung

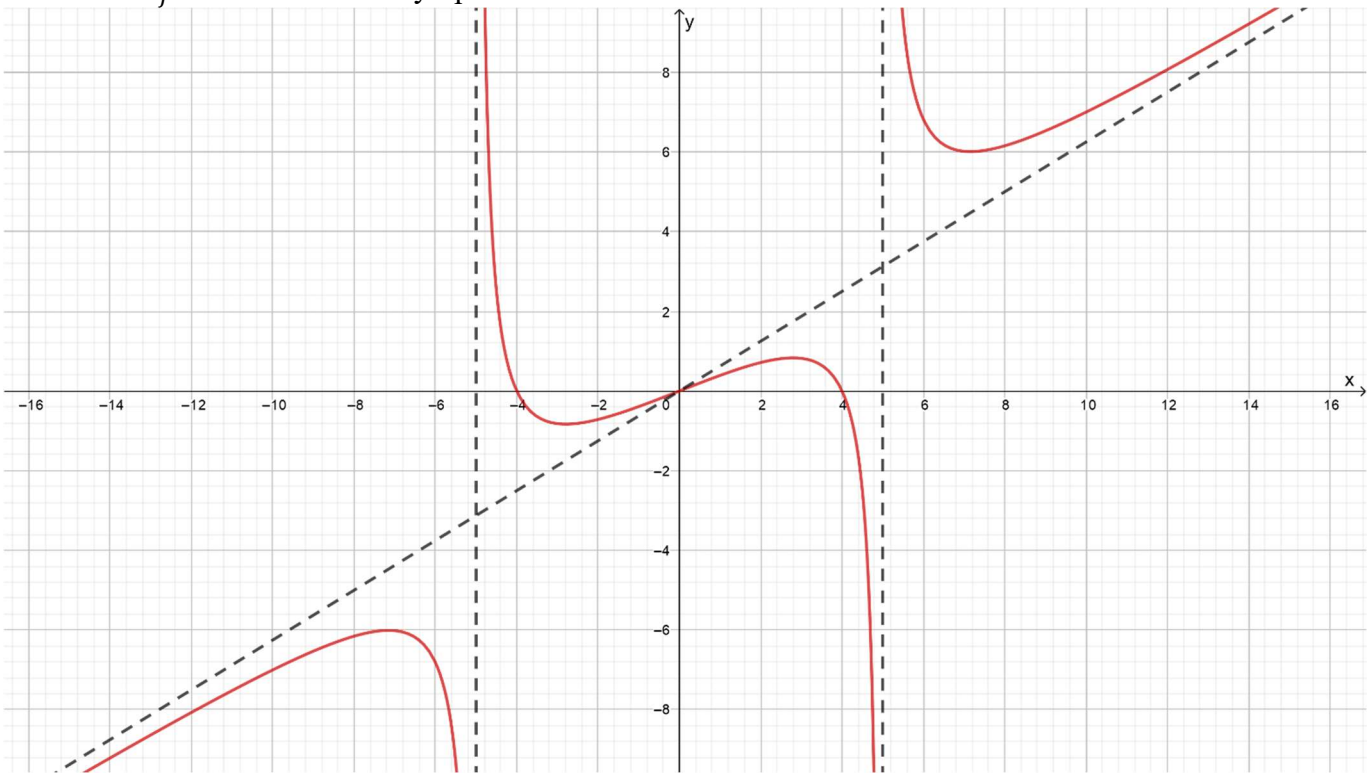
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|0)$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 4$ alle einfach

$x_{1,2} = \pm 5$ Pole 1. Ordnung

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben



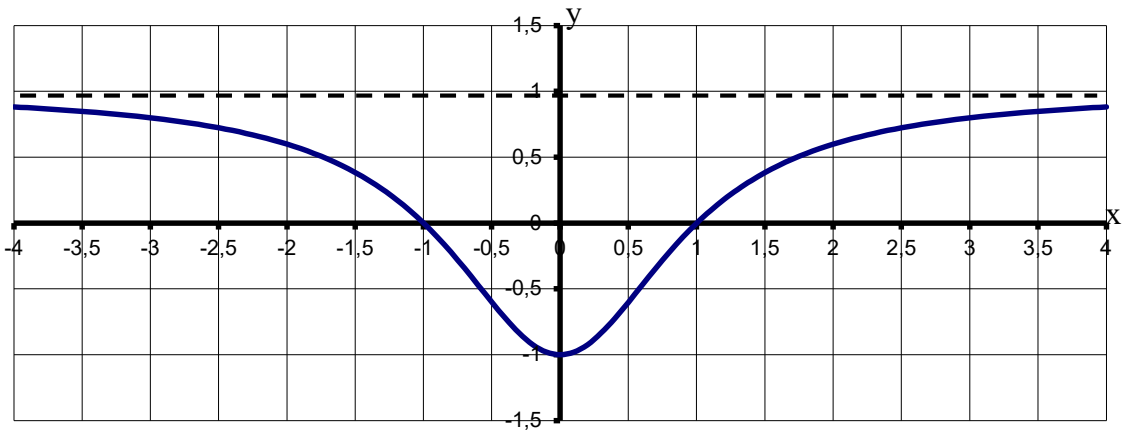
28/4

- $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners
- Zähler und Nenner haben einen gemeinsamen Faktor (Zahl oder Linearfaktor; im zweiten Fall: gemeinsame Nullstelle)

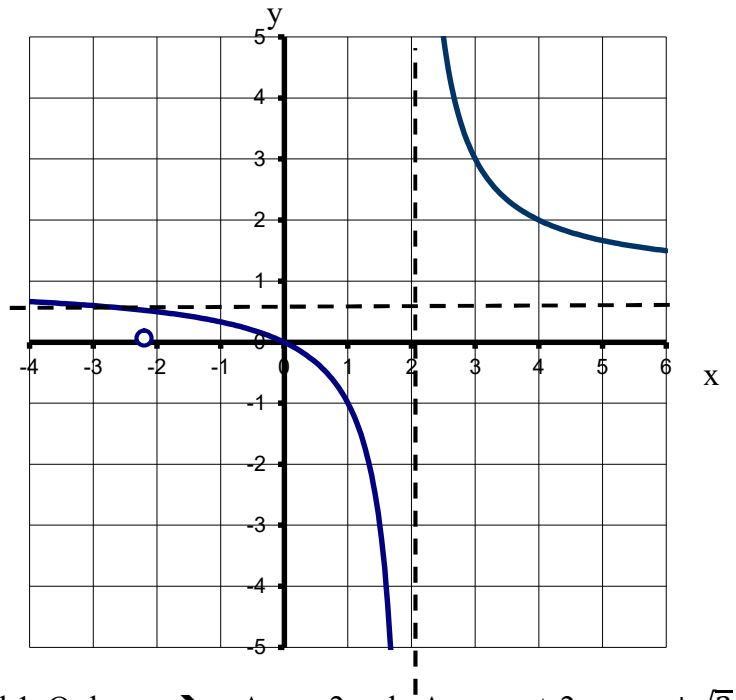
- x_0 ist Definitionslücke und $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert (genau dann, wenn der Linearfaktor $(x - x_0)$ im Nenner vollständig weggekürzt werden kann)
- Loch
- Term von f, in dem der Linearfaktor $(x - x_0)$ im Nenner vollständig weggekürzt wurde
- Nullstellen des Zählers, die zur Definitionsmenge gehören
- siehe Merkhilfe; auch Symmetrie von D_f beachten!
- s. As.: $x = x_0$, wobei x_0 eine Polstelle ist; w. As.: ZG < NG ==> y = 0; ZG = NG ==> y = Quotient der LK; sch. As.: ZG = NG + 1, Polynomdivision durchführen, y = linearer Teil des Funktionsterms; As.kurve: ZG > NG + 1, Polynomdivision durchführen, y = ganzrationaler Teil des Funktionsterms
- f(x) = Funktionsterm der Asymptote setzen (bzw. echt gebrochenrationalen Teil gleich null setzen), Gleichung lösen, berechnetes x in Asymptote einsetzen
- mit / ohne VZW

<u>Blatt 58/1</u>

a) D = R; keine s. A.; w. A.: y = 1; $x_{1,2} = \pm 1$ beide einfach



b) D = R\{± 2}; $x_1 = -2$ ist SHD, $x_2 = 2$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. x = 2; w. A. y = 1; $x_1 = 0$ einfach

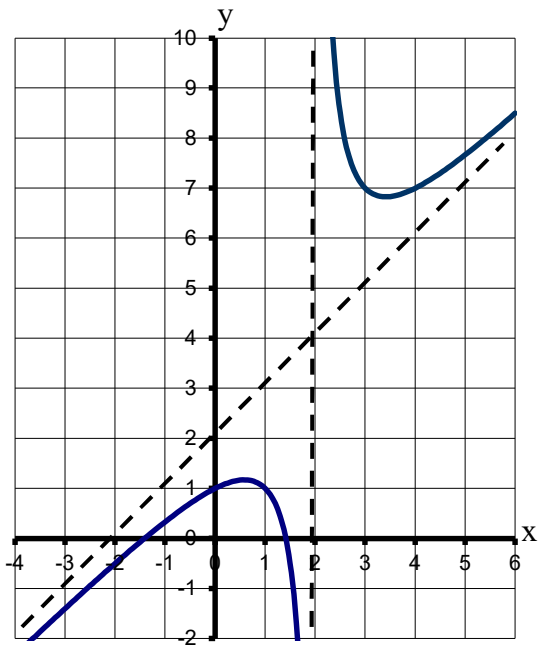


c) D = R\{2}; $x_1 = 2$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. x = 2; sch. A. y = x + 2; $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ beide einfach

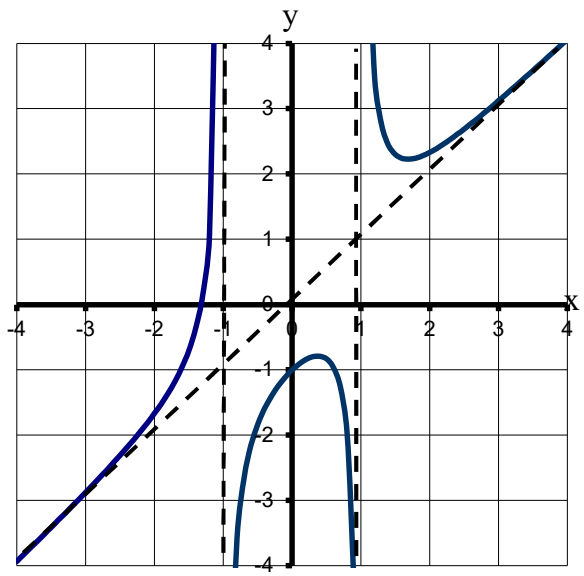
d) D = R\{± 1}; $x_{1,2} = \pm 1$ sind Pole 1. Ordnung ➔ s. A. x = –1 und x = 1; sch. A. y = x; $x_1 \approx -1{,}32$

e) D = R\{1;–0,5}; $x_1 = 1$ ist SHD; $x_2 = –0,5$ ist P1 ➔ s. A. x = –0,5; w. A. y = 0; keine Nullstellen

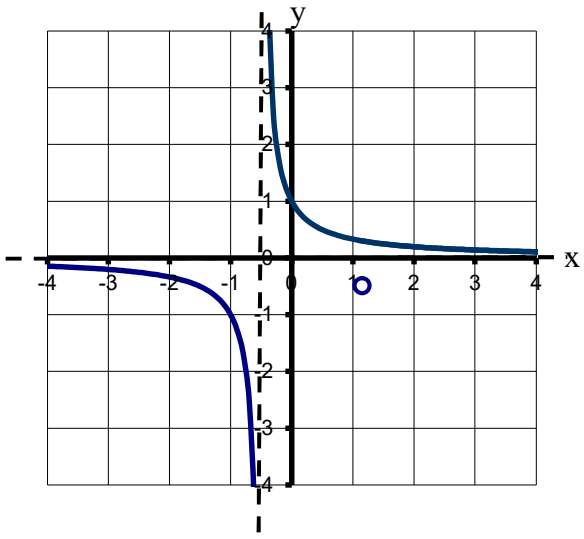
Graph zu c)



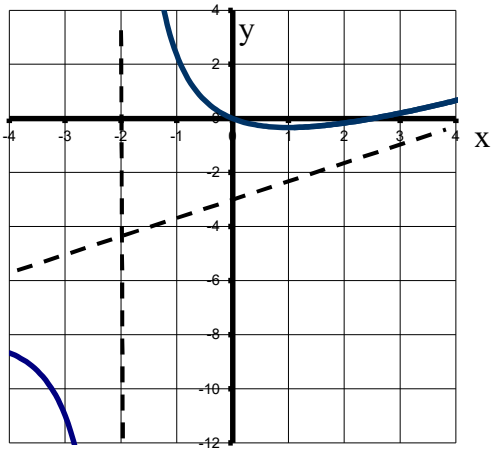
Graph zu d)



Graph zu e)



f) D = R\{–2}; $x_1 = -2$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. x = –2; sch. A. $y = \frac{2}{3}x - 3$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}5$ (einfach)



I.4 Ableitungen

Übungsblatt (Lambacher-Schweizer Analysis 2):

191/23

a) $-x^{-2}$ b) $-4x^{-5}$ c) $-6x^{-4}$ d) $-2{,}5x^{-6}$ e) $-2x^{-3}$ f) $-18x^{-7}$ g) $-1{,}5x^{-4}$ h) $-\frac{20}{3}x^{-5}$ i) $-2at^{-3}$

j) $-3ct^{-4}$ k) $-\frac{p}{q}r^{-2}$ l) $-\frac{4}{a}s^{-3}$

191/25 a) 2x b) 1,5 c) $0{,}75 + 1{,}25x^{-2}$ d) $-2x^{-3} - x^{-2}$

191/26 a) $-\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}$ b) $-\frac{1}{2x^3} + \frac{4x}{(2x^2-1)^2}$ d) $-\frac{2}{u^3} + \frac{2u}{(u^2-1)^2}$

189/7 a) $-\frac{1}{x^2}$ b) $-\frac{1}{x^2} - 2x$ c) $-\frac{3}{x^2}$

192/29 a) $-\frac{6ax}{(b+x^2)^2}$ b) $\frac{3}{b+x^2}$ c) $-\frac{3a}{(b+x^2)^2}$ d) 0

195/12 a) $6(2-3x)^{-3}$ b) $-3(0{,}5x - 5x^3)^{-4}(0{,}5 - 15x^2)$ c) $16t(1-2t^2)^{-5}$ d) $(2t-1)(t-t^2)^{-2}$

e) $\frac{4}{(1-2x)^3}$ f) $-\frac{12x+6}{(x+x^2)^4}$ g) $-\frac{60x}{(1+3x^2)^5}$ h) $-\frac{\sqrt{2}(1+4t)}{(t+2t^2)^4}$ i) $\frac{6x-3}{(2+x-x^2)^4}$

j) $-\frac{2(a+1)(2x-1)}{(a^2-x+x^2)^3}$ k) $-\frac{b}{(a+bt)^2}$ l) $-\frac{2a(b+1)}{(bt+t)^3}$

Übungsblatt (winklers):

75/4 e) D = R\{1}; $f'(x) = 3 - \frac{1}{(1-x)^2}$; $f''(x) = -\frac{2}{(1-x)^3}$

f) $D = R\setminus\{-\frac{1}{3}\}$; $f'(x) = 2 - \frac{12}{(3x+1)^2}$; $f''(x) = \frac{72}{(3x+1)^3}$

b) mit der Quotientenregel

Übungsblatt (Lambacher-Schweizer Analysis 2):

191/17 a) $\frac{2}{(1+3x)^2}$ b) $\frac{x^2-6x-1}{(x^2+1)^2}$ c) $\frac{2x}{(1+3x^2)^2}$ d) $\frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$

191/18 a) $\frac{26x}{(x^2+4)^2}$ b) $-\frac{12x^2}{(2+x^3)^2}$ c) $\frac{-t^4-4t^2+1}{(t^2+1)^2}$ d) $\frac{4r^5-8r^3}{(r^2-1)^2}$

191/19 a) $\frac{6x^2+90}{(15-x^2)^2}$ b) $\frac{8t^2+8t+10}{(2t+1)^2}$ c) $\frac{3a^2-8a-8}{(3a-4)^2}$ d) $\frac{0{,}8t^2+2t-1{,}5}{(1+0{,}8t)^2}$

191/20 a) $-\frac{2ab}{(a+bx)^2}$ b) $\frac{-2abx^2+2bc}{(ax^2-bx+c)^2}$ c) $\frac{c^2t^2+2cdt+cd}{(ct+d)^2}$ d) $\frac{3x^{-4}}{(x^{-3}-1)^2} = \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$

75/4 (ohne c; winklers 12 technische Ausbildungsrichtungen)

a) D = R\{1}; f '(x) = $-\frac{2}{(x-1)^2}$; f ''(x) = $\frac{4}{(x-1)^3}$ b) D = R; f '(x) = $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

d) D = R\{–1;+1}; f '(x) = $-\frac{6x}{(x^2-1)^2}$

c) mit der Quotienten- und Kettenregel

75/4 b) f ''(x) = $\frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$ c) f '(x) = $\frac{4x+6}{(x+1)^3}$; f ''(x) = $\frac{-8x-1}{(x+1)^4}$

d) f ''(x) = $\frac{18x^2+6}{(x^2-1)^3}$

33/1 a2, b2, c3, d2, e3

33/2

a) $f'(x) = \frac{-2x+4}{x^3}$; $f''(x) = \frac{4x-12}{x^4}$

b) $f'(x) = \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$; $f''(x) = \frac{18}{(x-1)^3}$

c) $f'(x) = -3\frac{x^2+6x+1}{(x^2+6x+5)^2}$; $f''(x) = 6\frac{(x+3)(x^2+6x+16)}{(x^2+6x+5)^3}$

d) $f'(x) = 2\frac{x^3-2x^2+x}{(2x-5)^2}$; $f''(x) = 2\frac{2x^3-15x^2+16x-}{(2x-5)^3}$

e) $f'(x) = \frac{-x^4+12x^2+8}{2(x^2-4)^2}$; $f''(x) = -4\frac{x^3+8x}{(x^2-4)^3}$

f) $f'(x) = \frac{-x^3+3x^2-3x+9}{(x-1)^3}$; $f''(x) = \frac{-108}{(x-1)^4}$

g) $f'(x) = \frac{-139x^2-140x+1115}{(10\ ^2-199x-20)^2}$; $f''(x) = \frac{2906\ \ ^2-16740x+2525}{(10x^2-199x-20)^3}$

h) $f'(x) = -2\frac{x^2-4x-2{,}5}{(x-2)^2}$; $f''(x) = \frac{-26}{(x-2)^3}$

I.5 Kurvendiskussion

40/1

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$; $x_{1,2} = 0$ ist Polstelle 2. Ordnung (ohne VZW), $x_3 = 1$ ist SHD

$$\bar{f}(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1 + \frac{-3x + 2}{x^2}$$

b) $x_1 = 2$

c) „am Rande" --> „an den Rändern"!

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1^-$; w. As.: y = 1

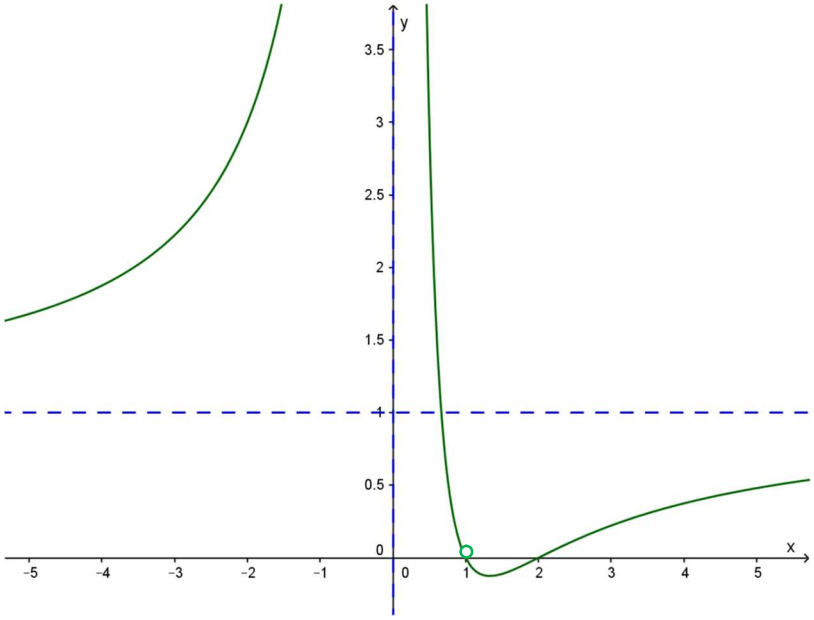
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$; s. As.: x = 0

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0^-$

d) S$\left(\frac{2}{3}\middle|1\right)$ e) TiP$\left(\frac{4}{3}\middle|-\frac{1}{8}\right)$

f) G_f ist linksgekr. in $]-\infty; 0[$ und $]0; 2]\backslash\{1\}$, rechtsgekr. in $[2; \infty[$; WeP(2|0)

g)



<u>40/2</u>

a) G_f ist symmetrisch zum Ursprung

b) „am Rande" --> „an den Rändern"!

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$; s. As.: x = 0

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

$x_{1,2} = \pm 2$ sind Polstellen 1. Ordnung (mit VZW)

s.As.: $x = -2$ und $x = 2$; sch. As.: $y = \frac{1}{2}x$

c) $x_{1,2,3} = 0$

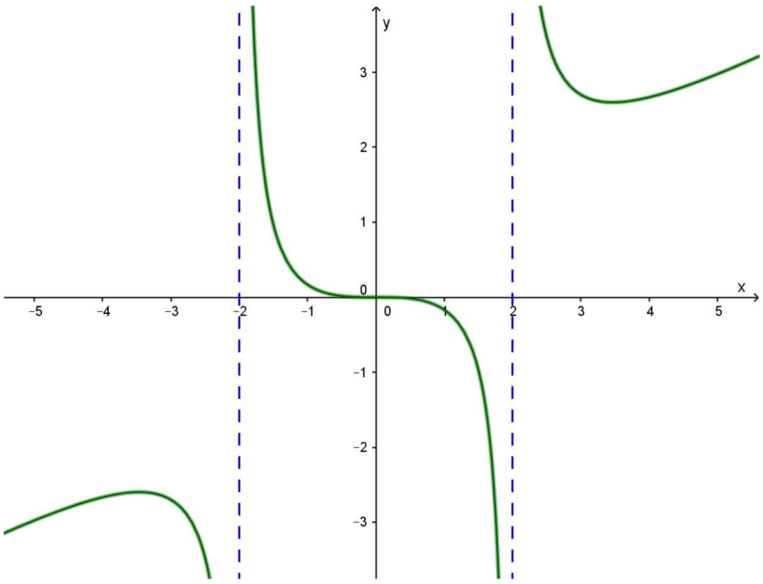
d) TeP(0|0); HoP$\left(-2\sqrt{3}\middle|-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$; TiP$\left(2\sqrt{3}\middle|\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

e) G_f ist rechtsgekr. in $]-\infty;-2[$ und $]-2;0]$, linksgekr. in $[0;2[$ und $]2;+\infty[$; WeP(0|0)

f)

x	–5	–2,25	–1,75	0	1,75	2,25	5
f(x)	$\approx -2{,}98$	$\approx -5{,}36$	$\approx -2{,}86$	0	$\approx 2{,}86$	$\approx 5{,}36$	$\approx 2{,}98$

g)



<u>40/3</u> a) TiP(2|–3) b) HoP$\left(0\middle|\frac{2}{9}\right)$ c) TiP$\left(4{,}5-\sqrt{2}\approx 3{,}09\middle|\approx 1{,}50\right)$; HoP$\left(4{,}5+\sqrt{2}\approx 5{,}91\middle|\approx 0{,}34\right)$

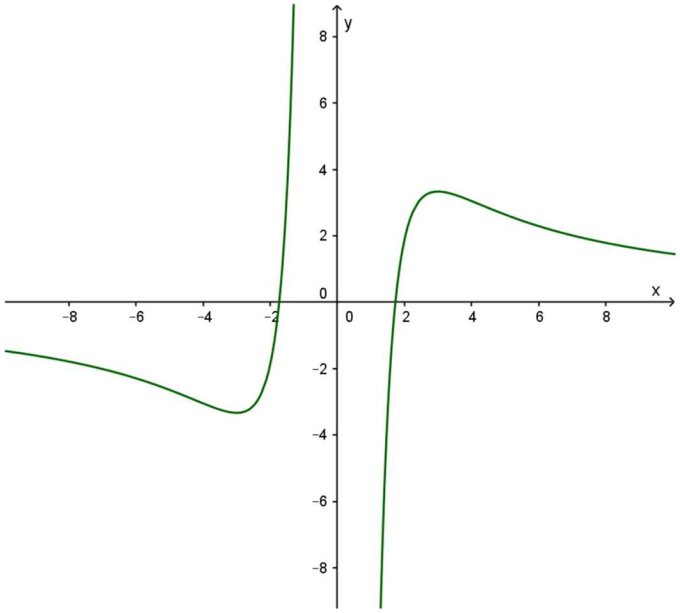
40/4

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; s. As.: $x = 0$; w. As.: $y = 0$ b) symmetrisch zum Ursprung

c) $f'(x) = 15\,\frac{9-x^2}{x^4}$; $f''(x) = 30\,\frac{x^2-1}{x^5}$ d) TiP$\left(-3\middle|-\frac{10}{3}\right)$; HoP$\left(3\middle|\frac{10}{3}\right)$

e) WeP$\left(3\sqrt{2}\middle|\frac{25}{12}\sqrt{2}\right)$ ==> $t_W(x) = -\frac{5}{12}x + \frac{10}{3}\sqrt{2}$ f) $t_H(x) = \frac{10}{3}$

g)



41/5 TiP$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62\middle|2-2\sqrt{5} \approx -2{,}47\right)$; HoP$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62\middle|2+2\sqrt{5} \approx 6{,}47\right)$

41/6 $\pm\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx \pm 1{,}30$

41/10

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (0{,}5x+1)) = 0^+$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (0{,}5x+1)) = 0^-$,

d.h. „ganz rechts“ bzw. „ganz links“ nähert sich der Graph von f von oben bzw. von unten an die schräge Asymptote y = 0,5x + 1 an.

c) Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - (0{,}5x+1)) = 0$ folgt auch $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - (0{,}5x+1))' = 0$,

also $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0{,}5$.

d) $L =]1; 2[$

e) TiP$\left(-\sqrt{2}\middle|\sqrt{2}+1\right)$; HoP$\left(\sqrt{2}\middle|-\sqrt{2}+1\right)$

41/11 Machen Sie mal. In der Merkhilfe steht viel dazu, außerdem natürlich auch im Buch.

49/1

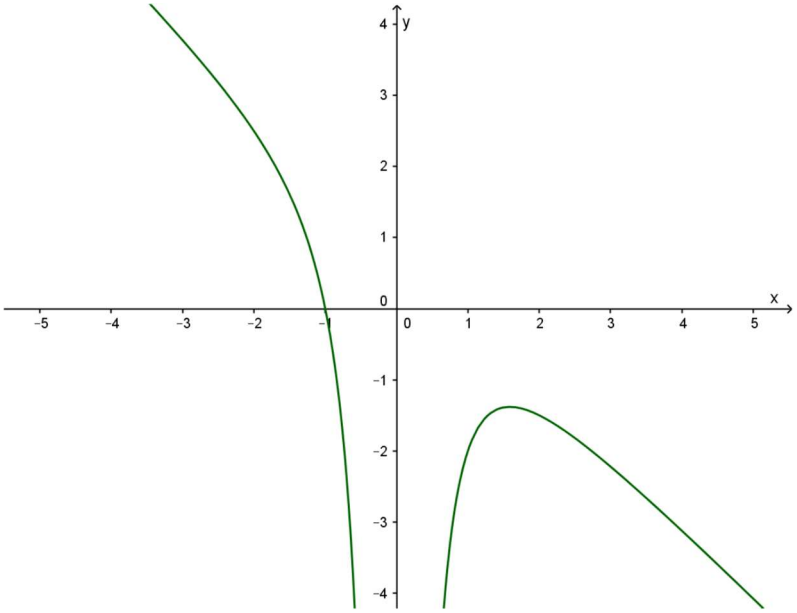
a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

b) $x_1 = -1$

c) sch. As.: $y = -x + 1$; $f(x) = -x + 1$ hat keine Lösung

d) P$(\approx 1{,}59| \approx -1{,}38)$

e)



<u>49/2</u>

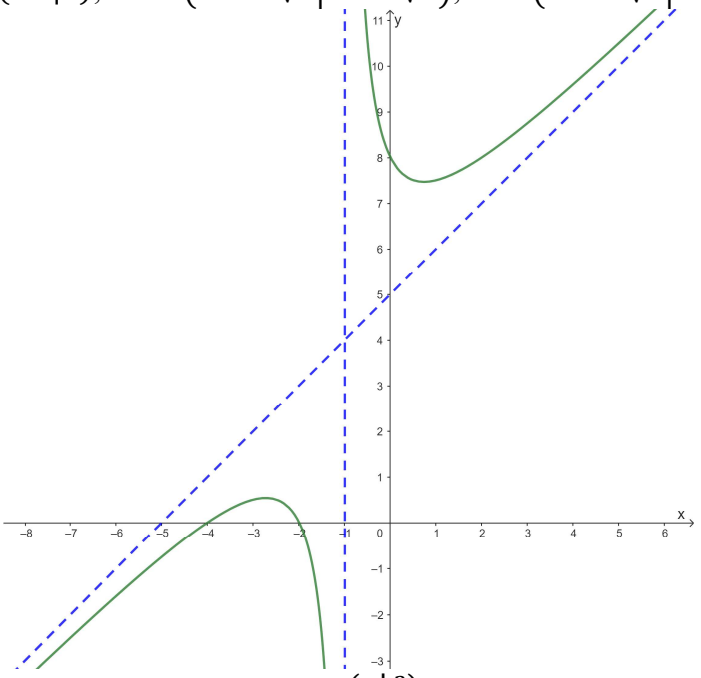
a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu P$(-1|4)$)

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|8)$; $N_1(-4|0)$, $N_2(-2|0)$; HoP$\left(-1-\sqrt{3}\middle|4-2\sqrt{3}\right)$; TiP$\left(-1+\sqrt{3}\middle|4+2\sqrt{3}\right)$; keine WeP



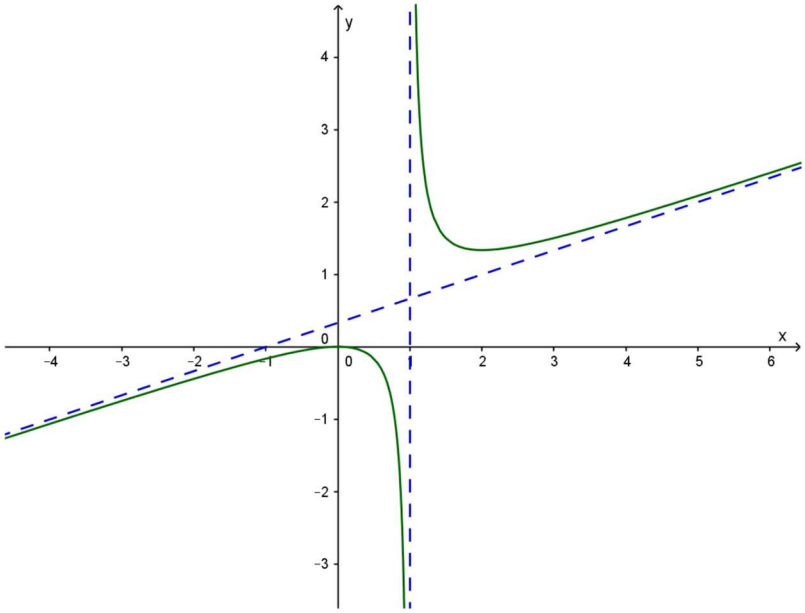
b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu P$\left(1\middle|\frac{2}{3}\right)$)

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|0)$ = N = HoP; TiP$\left(2\middle|\frac{4}{3}\right)$; keine WeP



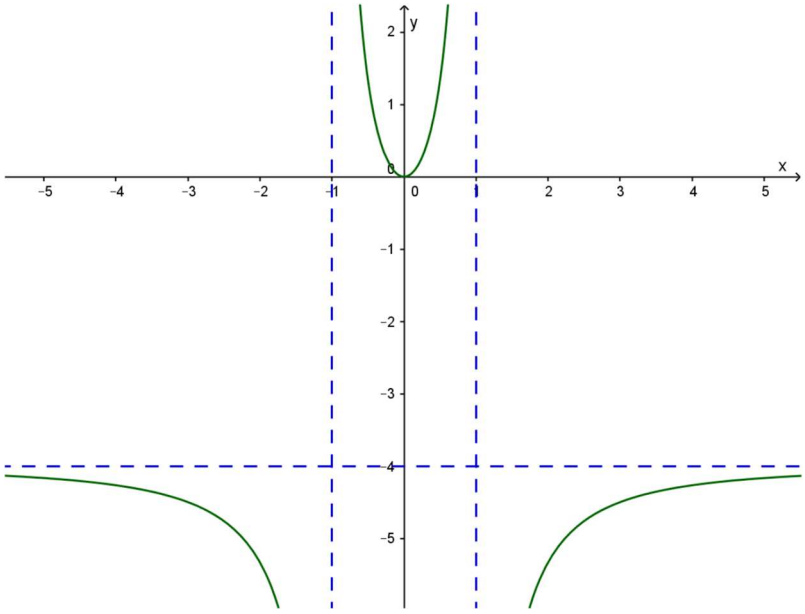
c) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; symmetrisch zur y-Achse

$x \to \pm\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

$S_y(0|0)$ = N = TiP; keine WeP



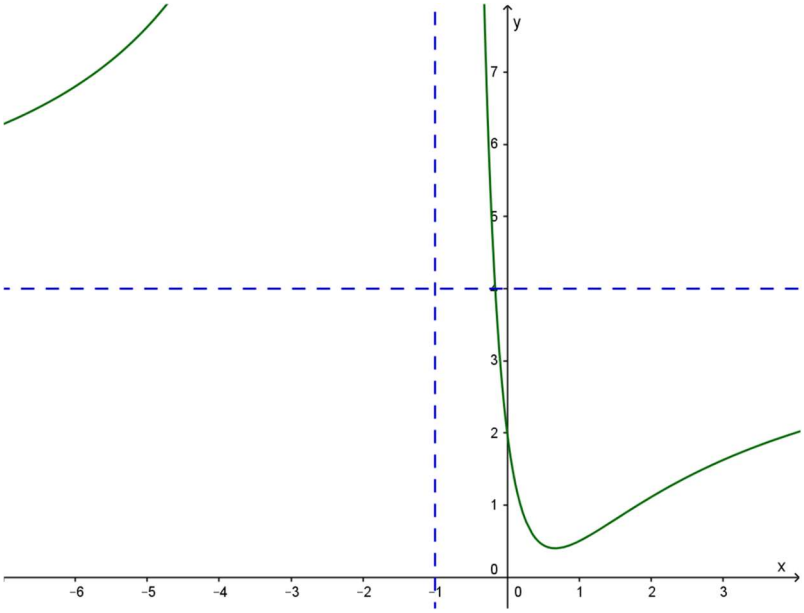
d) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; keine Symmetrie zum KS

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|2)$; keine N; TiP$\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{2}{5}\right)$; WeP$\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{4}{5}\right)$

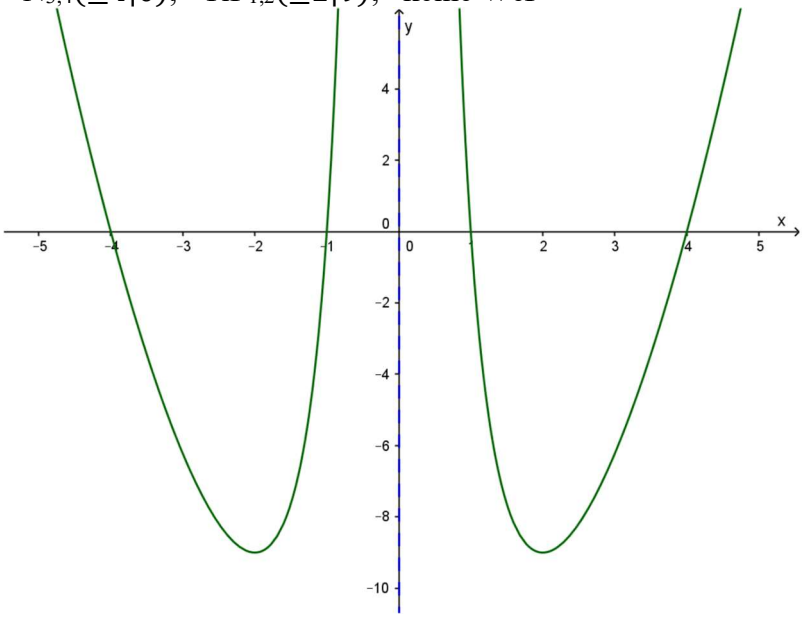


e) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; symmetrisch zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$; keine Asymptote im Unendlichen, nur Asymptotenkurve!

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

kein S_y; $N_{1,2}(\pm 1|0)$; $N_{3,4}(\pm 4|0)$; $TiP_{1,2}(\pm 2|9)$; keine WeP



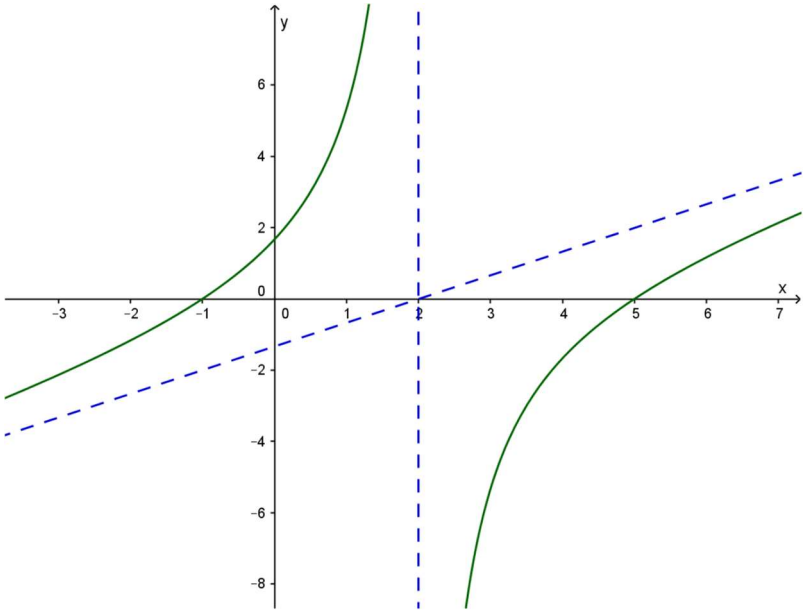
f) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu P(2|0))

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

$S_y\left(0\left|\frac{5}{3}\right.\right)$; $N_1(-1|0)$; $N_2(5|0)$; keine ExP; keine WeP



g) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$; symmetrisch zum Ursprung

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

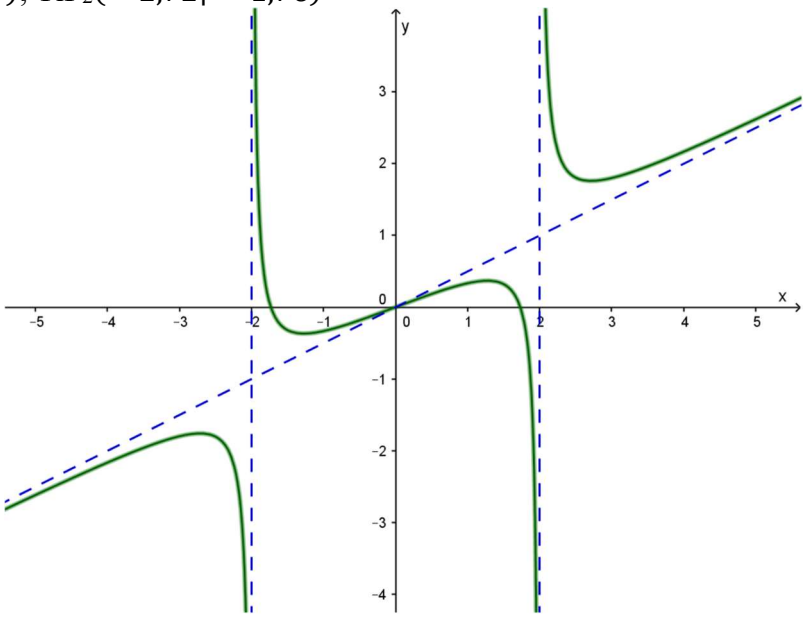
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|0)$ = N; $N_{2,3}\left(\pm\sqrt{3}\middle|0\right)$; WeP(0|0)

$HoP_1(\approx -2{,}72| \approx -1{,}76)$; $TiP_1(\approx -1{,}28| \approx -0{,}37)$;

$HoP_2(\approx 1{,}28| \approx 0{,}37)$; $TiP_2(\approx 2{,}72| \approx 1{,}76)$



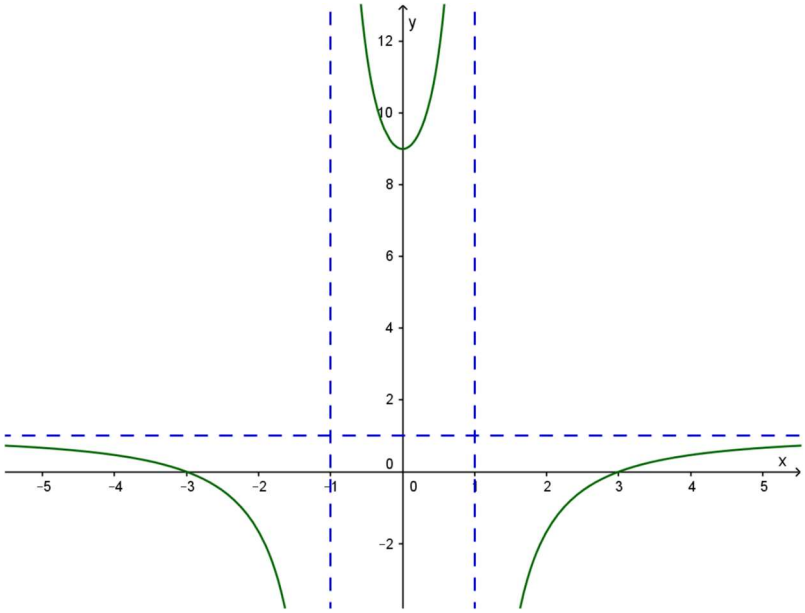
h) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; symmetrisch zur y-Achse

$x \to \pm\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$S_y(0|9)$ = TiP; $N_{1,2}(\pm 3|0)$; keine WeP



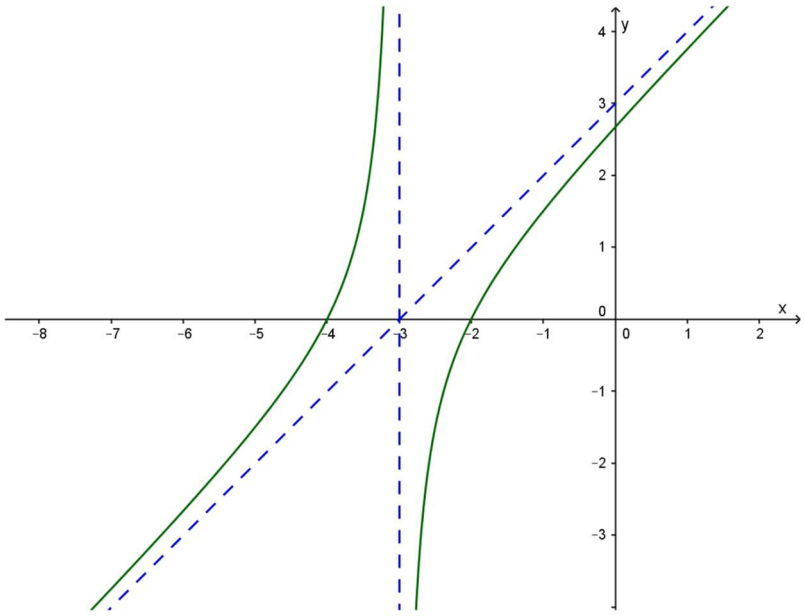
i) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$; keine Symmetrie zum KS (aber zu $P(0|-3)$)

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$

$S_y\left(0\left|\frac{8}{3}\right.\right)$; $N_1(-4|0)$, $N_2(-2|0)$; keine ExP; keine WeP



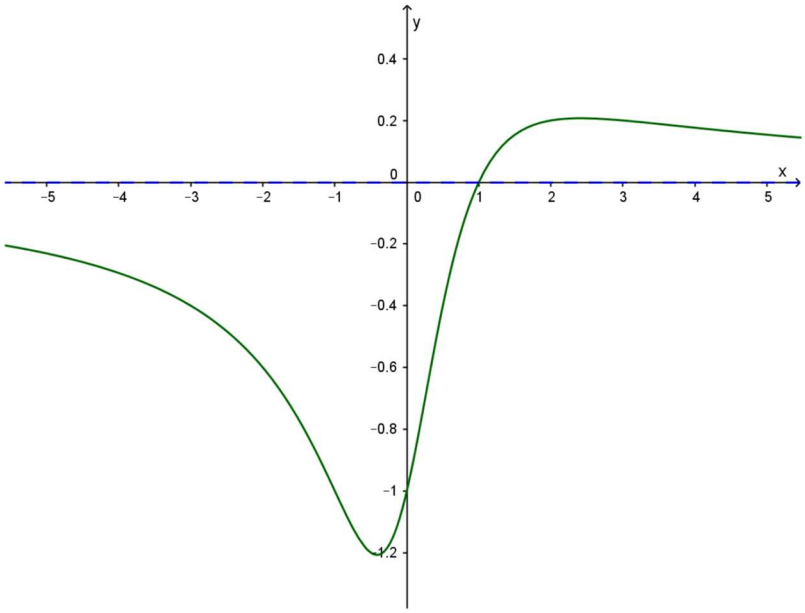
j) $D_f = \mathbb{R}$; keine Symmetrie zum KS

$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$S_y(0|-1)$; $N(1|0)$; $TiP\left(1-\sqrt{2}\left|\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right.\right)$, $HoP\left(1+\sqrt{2}\left|\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right.\right)$

$WeP_1(-1|-1)$, $WeP_2\left(2-\sqrt{3}\left|\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right.\right)$, $WeP_3\left(2+\sqrt{3}\left|\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right.\right)$



k) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; symmetrisch zum Ursprung

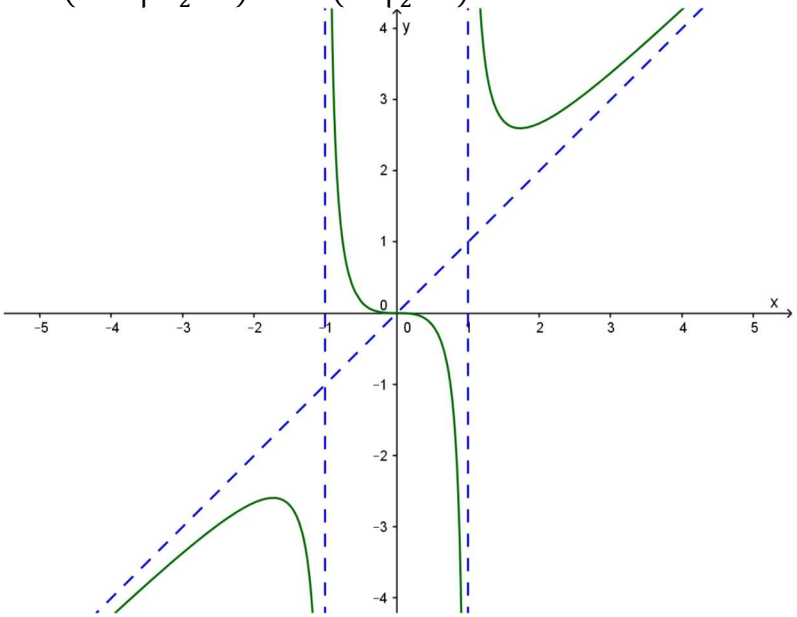
$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|0)$ = N = WeP; HoP$\left(-\sqrt{3}\middle|-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, TiP$\left(\sqrt{3}\middle|\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$



l) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; symmetrisch zum Ursprung

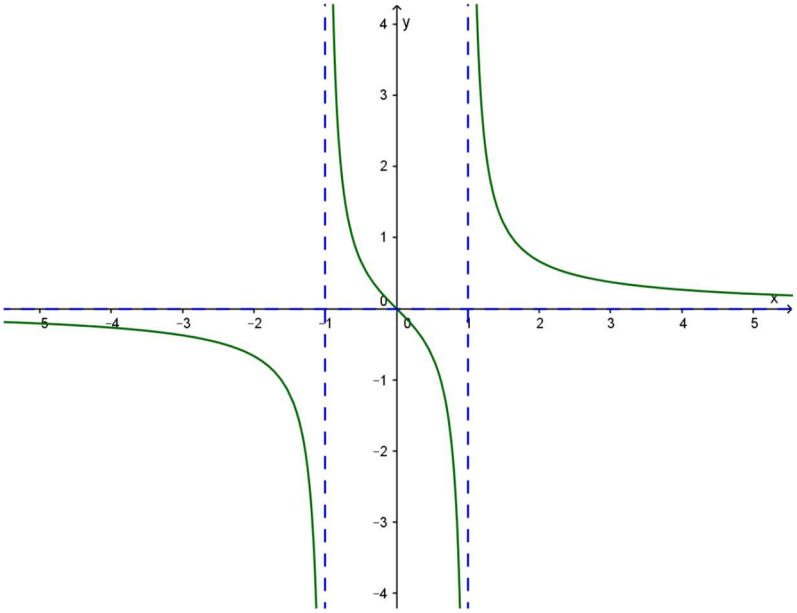
$x \to -\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von unten

$x \to +\infty$: G_f nähert sich der Asymptote von oben

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$S_y(0|0)$ = N = WeP; keine ExP



49/3

a) symmetrisch zum Ursprung

b) $D_f = \mathbb{R}$; $x_1 = 0$; w. As.: y = 0

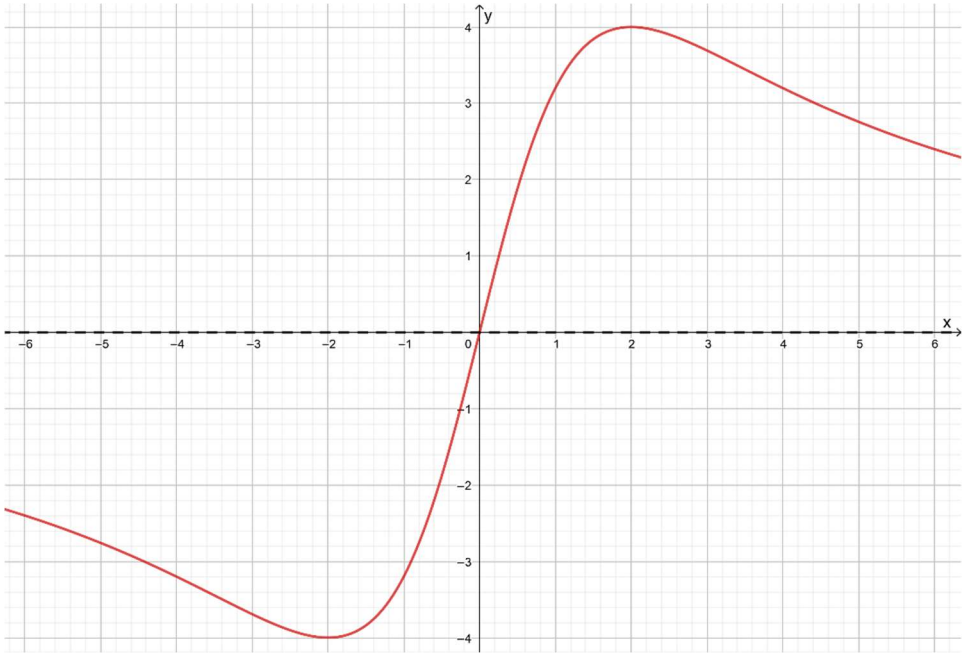
c) $f'(x) = 16\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$; $f''(x) = 32\frac{x^3-12}{(x^2+4)^3}$ ➔ TiP(–2|–4); HoP(2|4)

d) *Statt einer Vorzeichentabelle wäre es sinnvoller, ausnutzen, dass der Nenner immer positiv ist, und sich den Graphen zum Zähler zu skizzieren…*

G_f ist RK in $]-\infty; -2\sqrt{3}]$ und $[0; 2\sqrt{3}]$, LK in $[-2\sqrt{3}; 0]$ und $[2\sqrt{3}; \infty[$

$WeP_1(0|0)$, $WeP_{2,3}(\pm 2\sqrt{3}|\pm 2\sqrt{3})$

e)



50/6

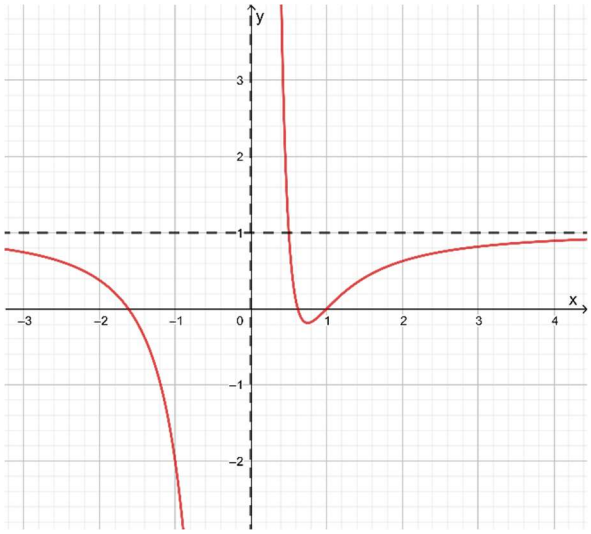
a) Bruch mit x^3 erweitern, zusammenfassen, …

w. As.: y = 1; s. As.: x = 0; S(0,5|1)

b) $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

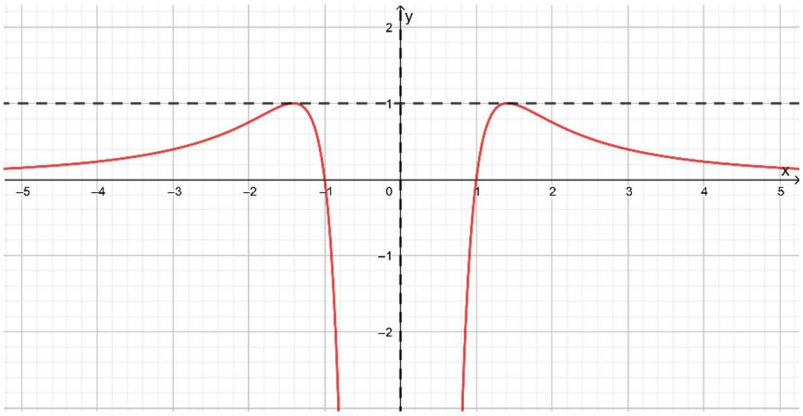
c) G_h ist smf in $]-\infty; 0[$ und $]0; \frac{3}{4}]$, sms in $[\frac{3}{4}; \infty[$; TiP$(\frac{3}{4}|-\frac{5}{27})$

d)

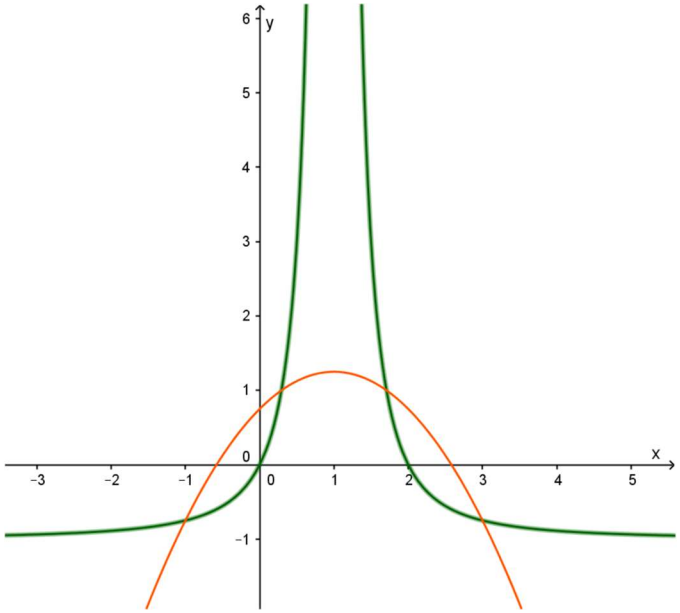


50/7
G_f ist LK in $]-\infty;-2]$ und $[-1;0[$, RK in $[-2;-1]$ und $]0;\infty[$
TeP(–1|0,5)

50/9
a) Symmetrie zur y-Achse
b) w. As.: y = 0; s. As.: x = 0; $x_{1,2} = \pm 1$
c) $HoP_{1,2}(\pm\sqrt{2}|1)$
G_f ist sms in $]-\infty;-\sqrt{2}]$ und $]0;\sqrt{2}]$, smf in $[-\sqrt{2};0[$ und $[\sqrt{2};\infty[$
d) G_f ist LK in $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{10}{3}}\right]$ und $\left[\sqrt{\frac{10}{3}};\infty\right[$, RK in $\left[-\sqrt{\frac{10}{3}};0\right[$ und $\left]0;\sqrt{\frac{10}{3}}\right]$; $WeP_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\middle|0{,}84\right)$
e)



51/12
a) keine Symmetrie zum KS
b) $x_{1,2} = 1$ ist Polstelle zweiter Ordnung (ohne VZW); Nullst.: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1^-$
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$
s.As.: $x = 1$; w. As.: $y = -1$
d) G_f ist sms in $]-\infty;1[$, smf in $]1;+\infty[$
G_f ist linksgekrümmt in $]-\infty;1[$ und $]1;+\infty[$
e) $y = -\frac{1}{4}x$; Q(0|0)
f,j) G_f: grün; P_A: orange



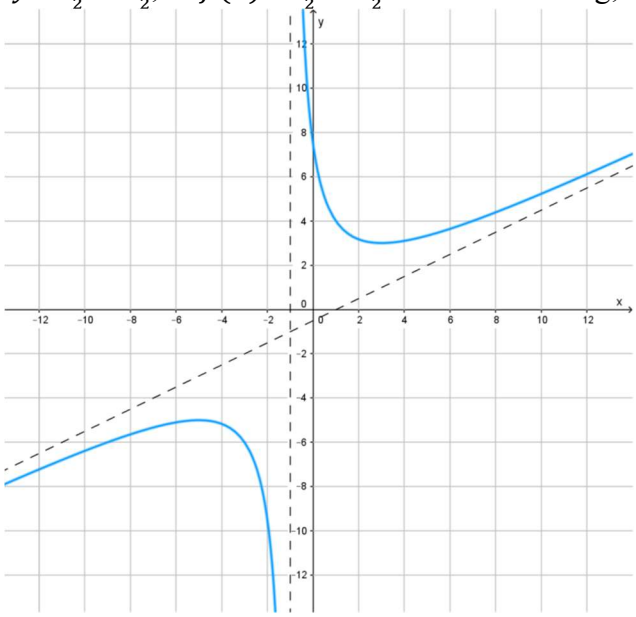
g) x = 1

52/15

- Im Nenner von f ' steht hoch 1 statt hoch 2; bei der Berechnung von f " wird dann seltsamerweise richtig hoch 2 verwendet.
- aus f " > 0 folgt TiP, aus f " < 0 folgt HoP
- bei der Berechnung der Funktionswerte wurde im Zähler jeweils die binomische Formel vergessen; die richtigen Ergebnisse sind $4 + 2\sqrt{3}$ bzw. $4 - 2\sqrt{3}$

53/18

a) s. As.: $x = -1$; sch. As.: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ hat keine Lösung; HoP$(-5|-5)$, TiP$(3|3)$



b) $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist symmetrisch zu x = 0 und $g(-x) = \cdots = -g(x)$

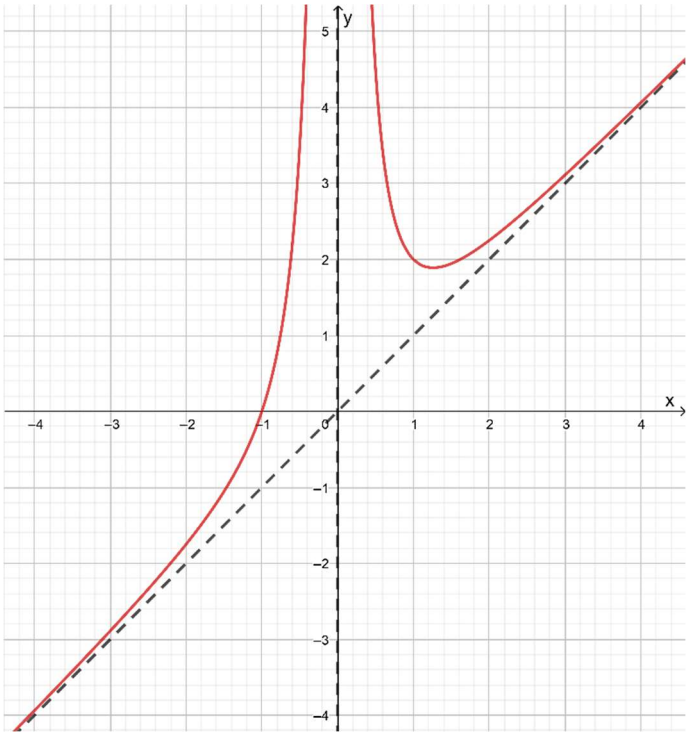
54/19

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f(x) = +\infty$

sch. As.: y = x; s. As.: x = 0

b)


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

I.6 Funktionsterme aufstellen

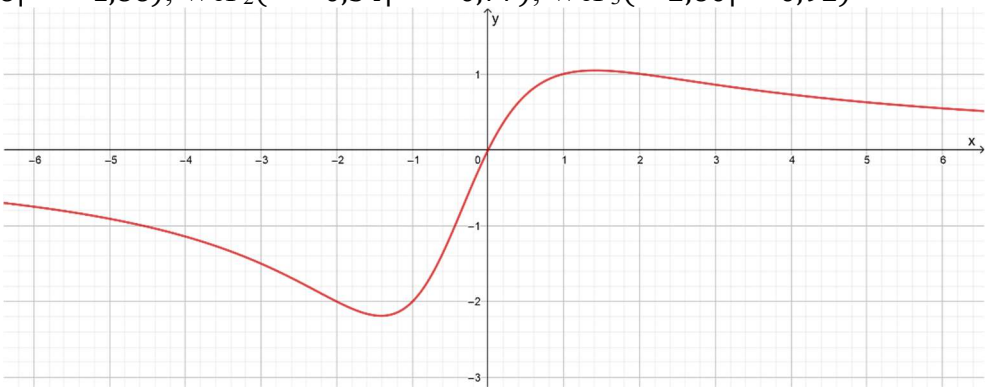
43/1

a) $f(x) = \frac{4x}{x^2+x+2}$

b) keine Symmetrie zum KS

TiP$\left(-\sqrt{2}\middle| \approx -2{,}19\right)$; HoP$\left(\sqrt{2}\middle| \approx 1{,}04\right)$

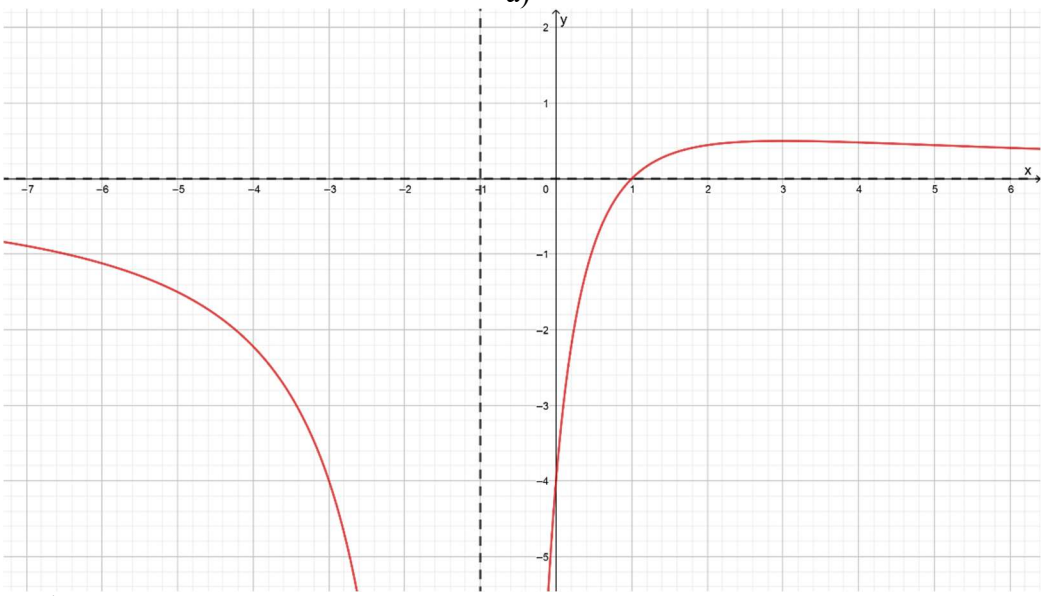
WeP$_1(\approx -2{,}26| \approx -1{,}86)$; WeP$_2(\approx -0{,}34| \approx -0{,}77)$; WeP$_3(\approx 2{,}60| \approx 0{,}92)$



43/2 1k, 2l, 4b, 5e, 6d, 10i, 11a, 12f

43/3

a)



b) $h(x) = 4\frac{x-1}{(x+1)^2}$; ExP(3|0,32)

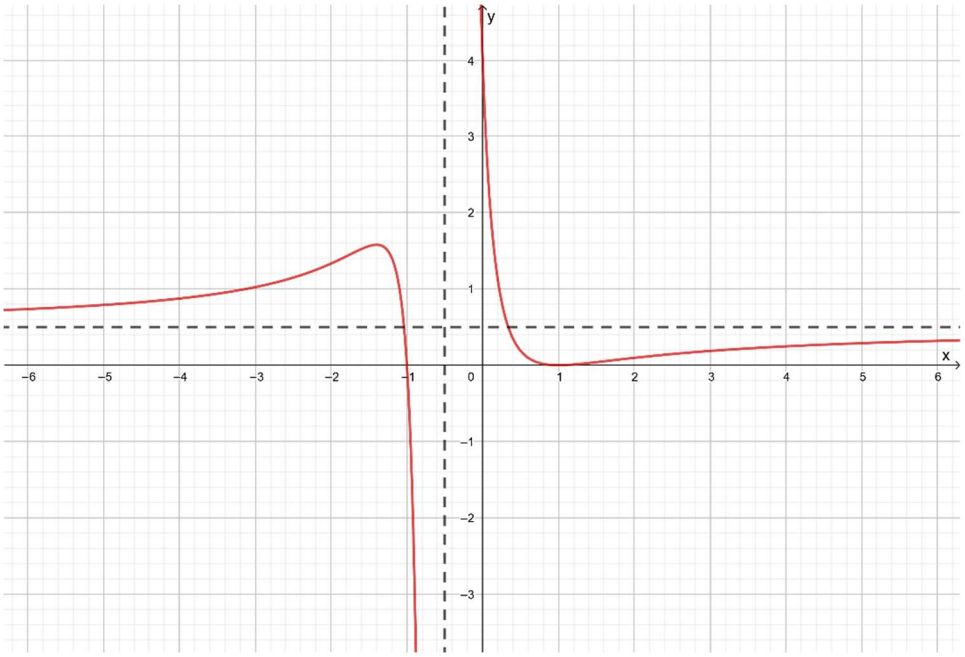
43/4

a) a = 20; b = 10

b) $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-10\}$

49/4

a)



b) $g(x) = 0.5\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x+0{,}5)^3} = \cdots$

HoP$\left(-1{,}4\middle|\frac{128}{81}\right)$; TiP(1|0)

c) k < 0: 1; k = 0: 2; 0 < k < 0,5: 3; k = 0,5: 2; 0,5 < k < 1,58: 3; k = 1,58: 2; k > 1,58: 1

Blatt:

Lambacher-Schweizer Analysis 2 Leistungskurs

201/10 a) f(x) = x + $\frac{1}{x}$ b) f(x) = –x + $\frac{1}{x^2}$ c) f(x) = x – $\frac{1}{x-2}$

201/11 a) $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-4)(x+5)} = \frac{x^2+x-2}{x^2+x-20}$ b) $f(x) = \frac{(x-0{,}5)x}{(x-\sqrt{2})(x+1)} = \frac{x^2-0{,}5x}{x^2+(1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}}$

winklers, Mathematik 12 Analysis, technische Ausbildungsrichtung

58/2 a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = -2 + \frac{1}{x(x-2)}$ d) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

e) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-3}$ f) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1}$ g) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{1}{x^2-4}$ h) $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x^2+1}$

I.7 Einfache Integrale

48/1

a) $-\frac{1}{6}x^{-6}+C$

b) $-\frac{5}{2}x^{-2}+C$

c) $-\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{2}x^8+C$

d) $\frac{3}{10}x^5+C$

e) $-\frac{4}{x}-\frac{3}{11}x^{-11}-\frac{1}{2}x^{10}+C$

48/2

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{49}{64}$ c) $\frac{45}{16}$

48/4

1: f (Nullstelle $x_1 = 2$; Grenzverhalten)
2: f‘ (Monotonie von f)
3: F (Monotonie ➔ f)
4: h (Polstelle 1. Ordnung $x_1 = 2$; Grenzverhalten)

49/5

a) $-3x^{-1}+\frac{3}{2x^2}-\frac{2}{3}x^6+C$

b) $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

c) $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{6x^6}+C$

d) $-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}+C$

e) $\frac{1}{12}(x+2)^{12}+C$

f) $-\frac{1}{12}(4-2x)^6+C$

50/6

e) $A_1 \approx 0{,}045$

f) $A(u) = \frac{1}{2u^2}-\frac{2}{u}+\frac{3}{2}$

g) $u = 4$

h) $\lim\limits_{u\to\infty} A(u) = \frac{3}{2}$

50/9

f) $A(k) = \frac{4}{3k^3}-\frac{4}{k}+\frac{8}{3}$

g) $k = 2$

h) $\lim\limits_{k\to\infty} A(k) = \frac{8}{3}$

i) $A = \frac{16}{3}(\sqrt{2}-1) \approx 2{,}21$

j) $A = \int_{\sqrt{2}}^{2}\big(f(x)-p(x)\big)dx \approx 0{,}069$

54/19

c) $A(u) = 1-\frac{1}{u}$

d) $\lim\limits_{u\to\infty} A(u) = 1$

51/12

h) F'(x) = ... = f(x)

i) $A = \frac{27}{16}$

j) $S_1(-1|-0{,}75)$, $S_2(3|-0{,}75)$, $S_{3,4}\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\middle|1\right)$

k) $A \approx 0{,}371$ (linke Fläche; wie auch immer man vorher schon sehen soll, dass das die größere ist)

l) $A = \frac{11}{3}+\frac{25}{12}\sqrt{2} \approx 0{,}720$

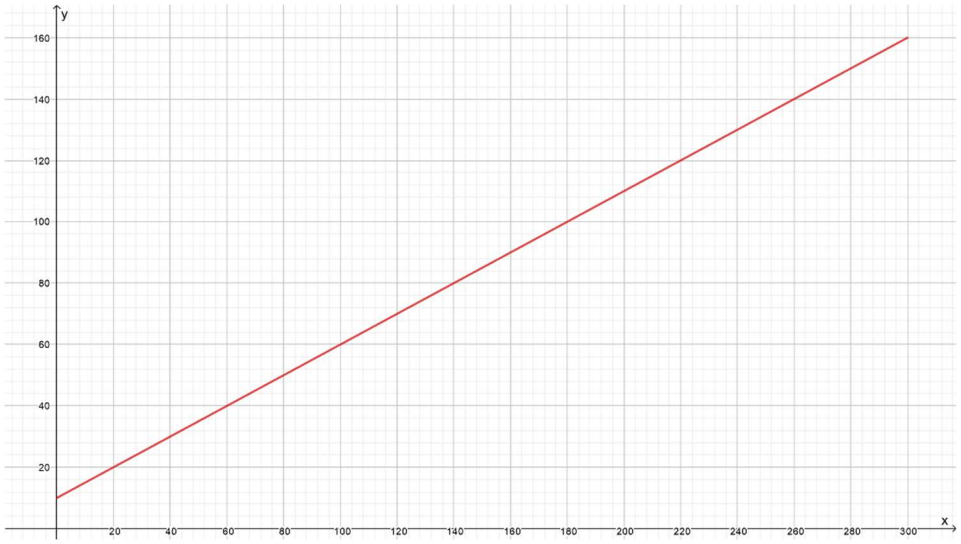
I.8 Anwendungen

26/1

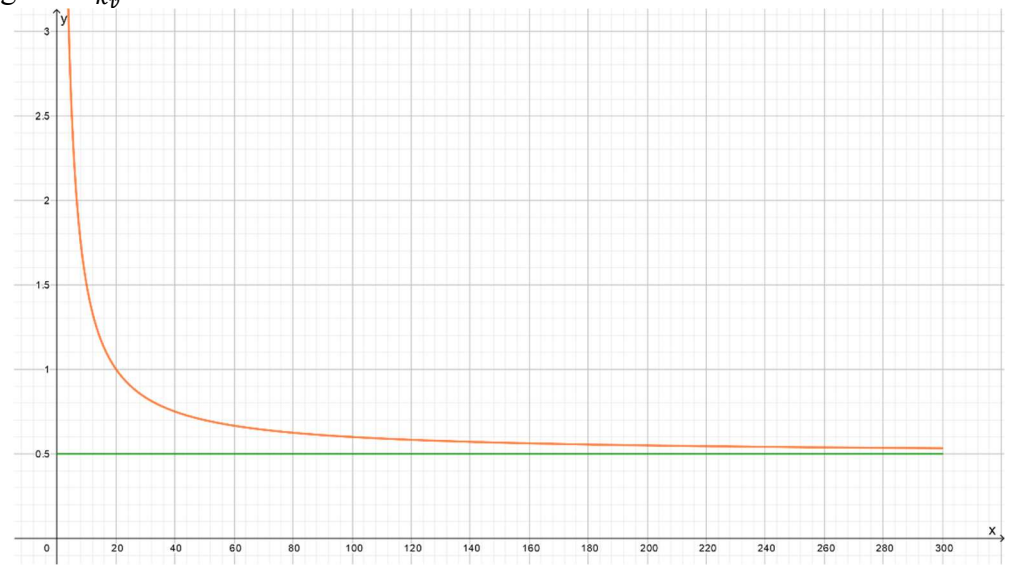
a) $K(x) = 0{,}5x + 10; \quad k(x) = 0{,}5 + \frac{10}{x}$

b) $K(0) = 10; \quad K(300) = 160; \quad \lim_{x \to 0} k(x) = \infty; \quad k(300) = \frac{8}{15}$

c) rot: G_K



orange: G_k; grün: G_{k_v}



26/2

a) k wird minimal für x = 5, nämlich 95

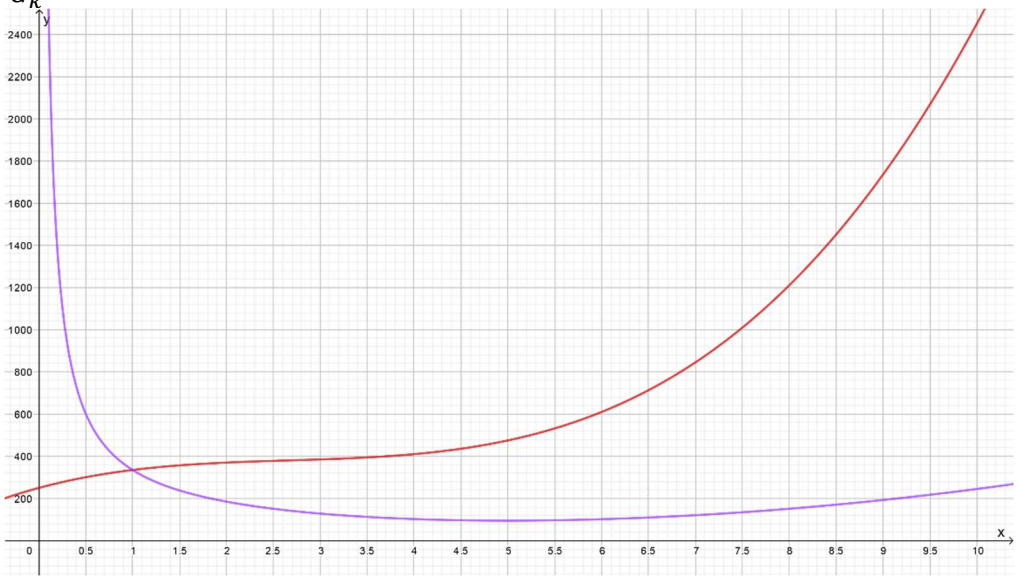
b) Der Graph von W (siehe (e)) fängt im Ursprung an, steigt monoton bis zu seinem Maximum bei x ≈ 3,8, nämlich ≈ 2,1, und fällt dann monoton. Der Betrieb ist also am wirtschaftlichsten, wenn etwa 3,8 ME produziert werden; der Erlös ist dann etwa das 2,1-fache der Kosten. W ist größer als 1, d. h. der Betreib arbeitet wirtschaftlich, für 1 < x < ≈ 6,6.

c) G(x) = x p(x) – K(x) ist positiv für 1 < x < ≈ 6,6, übereinstimmend mit (b). Der größte Gewinn wird erzielt bei einer Produktion von etwa 4,1 ME, nämlich etwa 451 GE. Dies widerspricht (b), denn die Wirtschaftlichkeit ist ja bei etwa 3,8 ME am größten.

d) Die höchste Umsatzrentabilität wird erreicht, wenn etwa 3,8 ME produziert werden; der Gewinn ist dann gut halb so groß wie der Erlös. Dies stimmt mit (b) überein, aber nicht mit (c). U ist größer als 0, d. h. der Betreib macht Gewinn, für $1 < x < \approx 6{,}6$, übereinstimmend mit (b) und (c).

e)

rot: G_K; lila: G_k



orange: G_U; grün: G_W

<u>26/3</u>

$$U(x) = \frac{G(x)}{E(x)} = \frac{E(x) - K(x)}{E(x)} = \frac{E(x)}{E(x)} - \frac{K(x)}{E(x)} = 1 - \frac{1}{\frac{E(x)}{K(x)}} = 1 - \frac{1}{W(x)}$$

<u>26/4</u>

a) W_1: grün; W_2: gelb; U_1: blau; U_2: rot

$$W_1(x) = \frac{175x}{x^3 - 12x^2 + 50x + 800}; \quad W_2(x) = \frac{177x}{8x^3 - 72x^2 + 216x + 200}$$

$$U_1(x) = \frac{-x^3 + 12x^2 + 125x - 800}{175x}; \quad U_2(x) = \frac{-8x^3 + 72x^2 - 39x - 200}{177x}$$

b)

X	5	7,5	10
$W_1(x)$	1	$\approx 1{,}42$	$\approx 1{,}59$
$W_2(x)$	$\approx 1{,}84$	$\approx 1{,}16$	$\approx 0{,}56$
$U_1(x)$	0	$\approx 0{,}3$	$\approx 0{,}34$

$U_2(x)$	$\approx 0{,}46$	$\approx 0{,}14$	$\approx -0{,}79$

im Folgenden immer x > 0!

c_1) wahr, denn Erlös und Kosten sind beide nie negativ (bzw.: siehe Graphen)

c_2) falsch, denn der Gewinn kann nicht größer als der Erlös sein (bzw.: siehe Graphen)

c_3) wahr, denn dann ist der Erlös größer als die Kosten

c_4) falsch, denn der Erlös ist immer positiv, der Gewinn kann aber auch negativ sein (bzw.: s. Graphen)

c_5) wahr, denn bei der Maximalstelle von U_2 hat W_1 etwa den Wert 1 bzw. U_1 wird dort positiv

c_6) falsch, denn wenn G(x) gleich ist, E(x) aber größer, dann ist U(x) = G(x)/E(x) kleiner

c_7) wahr, denn wenn E(x) gleich ist, K(x) aber kleiner, dann ist W(x) = E(x)/K(x) größer

c_8) wahr für die hier gezeigten Graphen; allgemeiner Beweis: 53/17

c_9) wahr, siehe Graphen: für Standort 2 hat W ein höheres Maximum, aber für Standort 1 gilt, dass W in einem größeren Intervall > 1 ist

c_{10}) wahr, denn da E(x) immer positiv ist, folgt, dass U(x) = G(x)/E(x) genau dann positiv ist, wenn G(x) positiv ist

c_{11}) wahr, denn für Standort 1 ist U in einem größeren Intervall positiv als für Standort 1

<u>28/3</u>

aus dem Graph von W: Der Betrieb arbeitet am wirtschaftlichsten, wenn etwa 32 ME produziert werden; der Erlös ist dann etwa das 1,7-fache der Kosten. W ist größer als 1, d. h. der Betreib arbeitet wirtschaftlich, für $\approx 13 < x < \approx 54$.

aus dem Graph von U: Die höchste Umsatzrentabilität wird erreicht, wenn etwa 32 ME produziert werden; der Gewinn ist dann etwa 40% des Erlöses. U ist größer als 0, d. h. der Betreib macht Gewinn, für $\approx 13 < x < \approx 54$

$$W(x) = \frac{1260x}{0.9x^3 - 50x^2 + 1150x + 8500}; \quad U(x) = \frac{-0.9x^3 + 50x^2 + 110x - 8500}{1260x}$$

<u>28/5</u>

a) W: 2; U: 1

$$W(x) = \frac{49x}{0.25x^3 - 3x^2 + 12{,}5x + 200}; \quad U(x) = \frac{-0.25x^3 + 3x^2 + 36{,}5x - 200}{49x}$$

b) W und U sind beide am größten für eine Ausbringungsmenge von etwa 10 ME. Dann ist der Erlös etwa 1,8mal so groß wie die Kosten, und der Gewinn ist etwa 0,4mal so groß wie der Erlös.

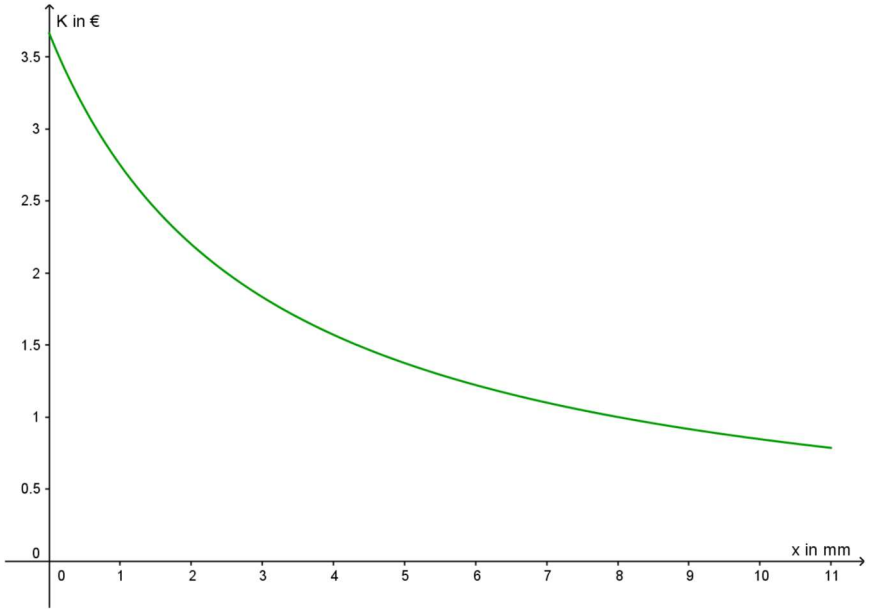
c) W steigt vom Ursprung aus streng monoton an bis zu seinem Maximum und fällt dann bis ins Unendliche streng monoton ab; es nähert sich dabei der x-Achse an, also dem Wert 0. W ist größer als 1, d. h. das Unternehmen arbeitet wirtschaftlich, zwischen etwa 4,5 und 17,5. U geht für x gegen null und x gegen unendlich jeweils gegen minus unendlich. Es steigt zunächst streng monoton an bis zu seinem Maximum und fällt dann streng monoton ab. U ist positiv zwischen etwa 4,5 und 17,5.

Die Gewinnzone liegt genau zwischen den Nullstellen von U.

28/6

a) 6 mm

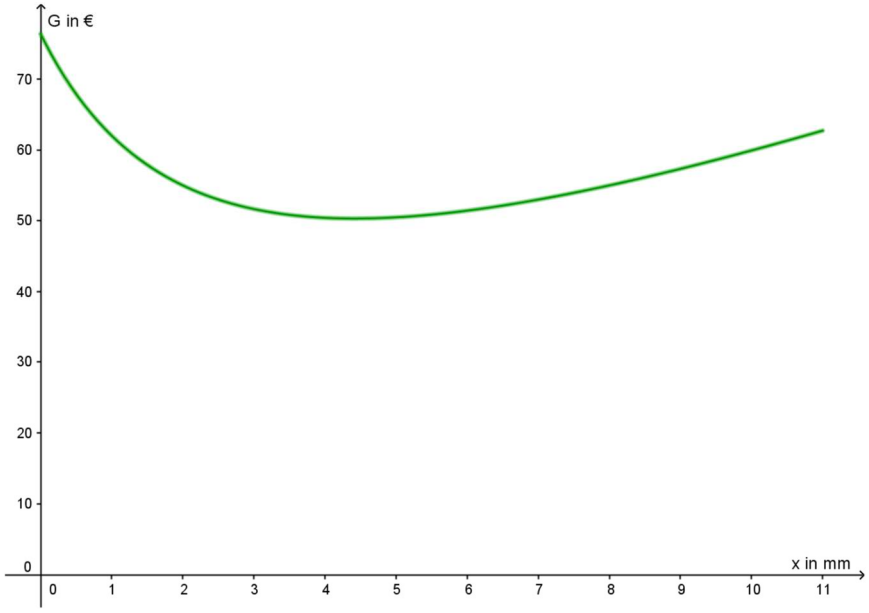
b)



c) 3: Fixkosten; 4: Kosten pro mm Dicke

d) $x = \sqrt{55} - 3 \approx 4{,}42$

e)



41/7 $x = \frac{50\sqrt{3}}{3} \approx 29$

(Die Funktionsgleichung kann man hier einfach als gegeben hinnehmen, man kann sie sich aber auch aus den Angaben, die im Text davor stehen, selbst herleiten – ähnlich wie in Bsp. 7 auf Seite 38.)

41/8

a) $W(x) = \frac{30x}{x^3-8x^2+20x+}$; $U(x) = \frac{-x^3+8x^2+10x-}{30x}$; $k(x) = x^2 - 8x + 20 + \frac{50}{x}$

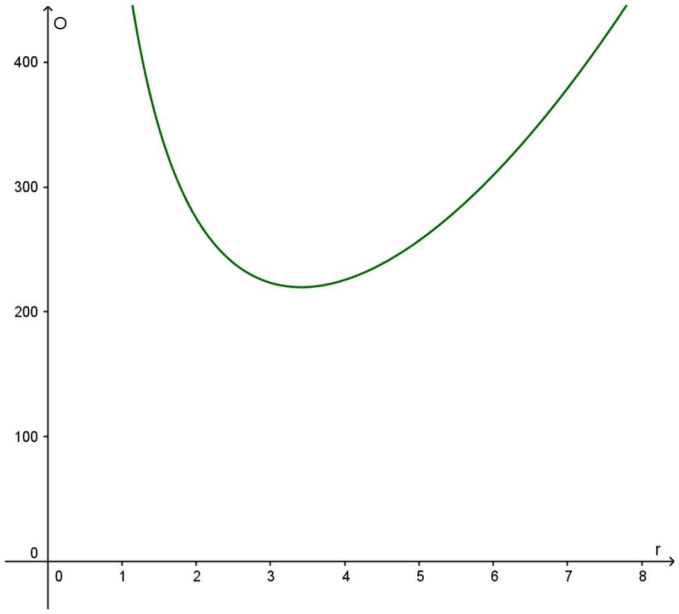
b) rot: G_W; blau: G_U; grün: G_k

c) Alle drei Stellen sind gleich, nämlich x = 5. (siehe auch 53/17!)

41/9 W und U sind beide maximal für eine Ausbringungsmenge von etwa 32,303 ME, nämlich etwa 1,709 bzw. etwa 0,415.

50/8

$r_{min} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 3{,}41$



bei $r = 3$: etwa 1,6% mehr Materialbedarf

bei $r = 2{,}5$: etwa 8,9% mehr Materialbedarf; bei $r = 4{,}5$: etwa 8,5% mehr Materialbedarf; aus Monotonie ==> für alle Radien zwischen 2,5 und 4,5 höchstens 8,9% mehr Materialbedarf

(Keine Ahnung, wie man das nur „in Worten", ohne Rechnung, begründen soll...)

51/11

a) Halbkugel: $O(r) = \cdots = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{200}{r}$; abs. Minimum für $r \approx 2{,}673$, nämlich $O \approx 112{,}2$

Kegel: $O(r) = \cdots = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)\pi r^2 + \frac{200}{r}$; abs. Minimum für $r \approx 2{,}631$, nämlich $O \approx 114{,}0$

➔ Beim ersten Vorschlag wird weniger Blech benötigt.

b) k: Kosten pro m^2 für Zylinderoberfläche und Deckel

Halbkugel: $K(r) = k \cdot \left(\frac{11}{3}\pi r^2 + \frac{200}{r}\right)$ ==> $r_{neu} \approx 2{,}06$

Kegel: $K(r) = k \cdot \left(\left(\frac{1}{3} + 2\sqrt{2}\right)\pi r^2 + \frac{200}{r}\right)$ ==> $r_{neu} \approx 2{,}16$

51/13

Aufgabenstellung sehr unklar formuliert; laut Musterlösung ist wohl gemeint „ ... wie der pro cm^2 des Deckels", und das Volumen soll konstant sein. Da kein konkretes Volumen vorgegeben ist, verwendet man in der Rechnung also dafür die Variable V als Parameter. Außerdem nennen wir die Kosten pro cm^2 des Deckels k.

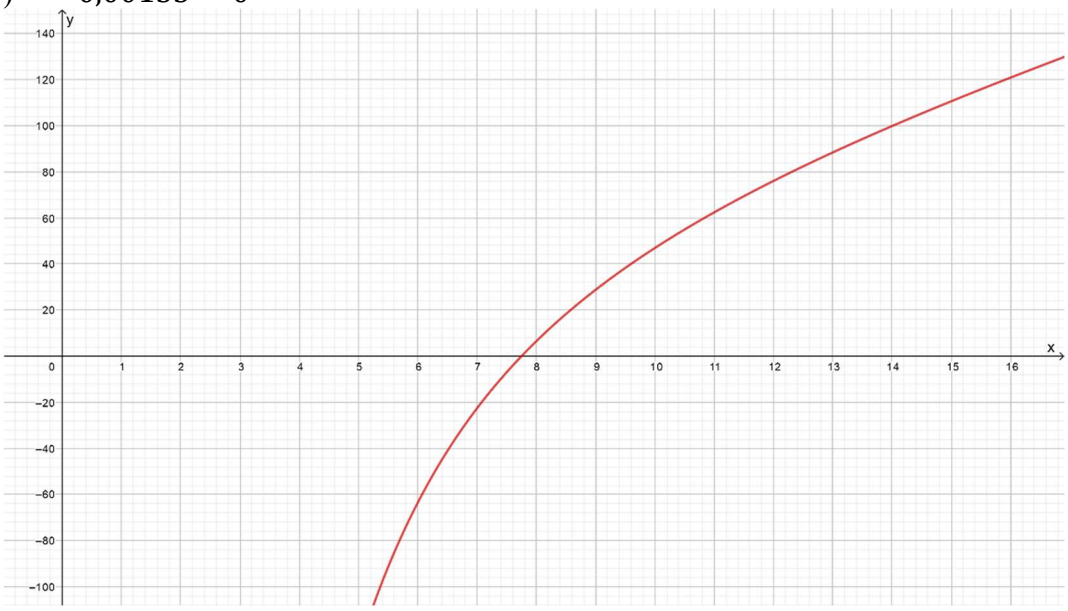
➔ $K(r) = \cdots = 4k\pi r^2 + \frac{6kV}{r}$; abs. Minimum für $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, nämlich $K = k\pi^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}}\left(4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$

52/14 Prüfungsaufgabe T12!

a) Machen Sie mal.

b) Flächeninhalt = Länge mal Breite; Länge = h+x+2, Breite = 4x+1; $V = 1000 = x^2 h$ ➔ $h = \frac{1000}{x^2}$ …

c) A‘(7,746) $\approx -0{,}00135 \approx 0$



A‘ < 0 für 0 < x < 7,746; A‘ > 0 für x > 7,746

➔ A ist sma in]0;7,746[, smz in]7,746;∞[➔ A hat absolutes Minimum bei x = 7,746

$h \approx 16{,}667$; Abmessungen: etwa 26,413 cm mal 31,984 cm

53/16

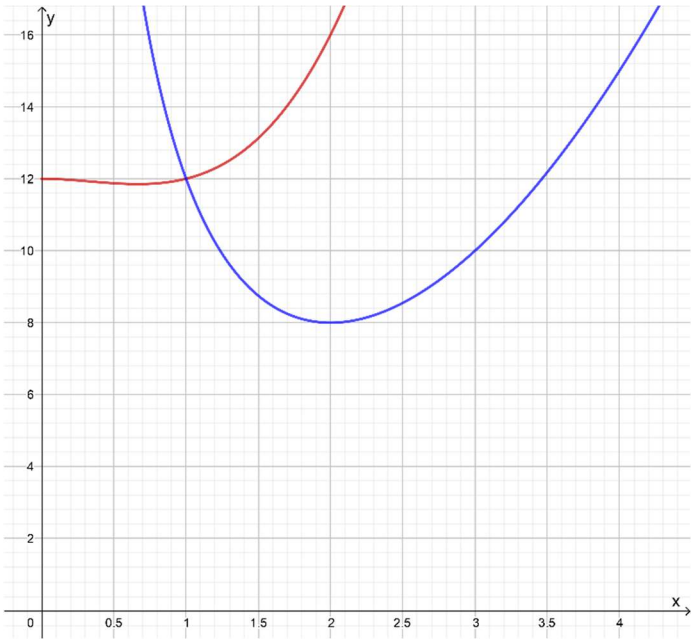
a) W: 1; U: 2

$$W(x) = \frac{11x}{x^3 - x^2 + 12}; \quad U(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 11x - 12}{11x}$$

b) W und U sind beide am größten für eine Ausbringungsmenge von 2 ME. Dann ist der Erlös 1,375mal so groß wie die Kosten, und der Gewinn ist etwa 0,273mal so groß wie der Erlös.

c) Das Betriebsoptimum ist 2 ME, die minimalen Stückkosten sind 8 GE/ME.

d) rot: G_K; blau: G_k



53/17

aus 26/3: $U(x) = 1 - \frac{1}{W(x)} \rightarrow U'(x) = \frac{W'(x)}{(W(x))^2}$

Für x > 0 ist immer $W(x) \neq 0$, also ist der Nenner $(W(x))^2$ immer positiv, also haben U‘(x) und W‘(x) für alle x jeweils dasselbe Vorzeichen (und U und W haben sowieso dieselbe Definitionsmenge). Deshalb haben U und W dieselben Monotonieintervalle, also auch dieselben Extremstellen (Lage und Art).

Muss man hier auch noch zeigen, dass beide Funktionen jeweils nur einen Extrempunkt haben, und zwar einen HoP?

Dazu kommt übrigens noch:

$W(x) = \frac{E(x)}{K(x)} \rightarrow W'(x) = \frac{E'(x)K(x) - E(x)K'(x)}{(K(x))^2} \rightarrow$ W (und damit auch U) hat eine Extremstelle für

$$E'(x)K(x) - E(x)K'(x) = 0 \rightarrow \frac{E'(x)}{E(x)} = \frac{K'(x)}{K(x)}$$

Wenn der Preis p konstant ist (unabhängig von der Absatzmenge x), also der Erlös proportional zu x ist, $E(x) = p \cdot x$, dann ist $E'(x) = p$, also folgt $\frac{E'(x)}{E(x)} = \frac{p}{px} = \frac{1}{x}$ und damit auch $\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{x}$.

Andererseits ist $k(x) = \frac{K(x)}{x} \rightarrow k'(x) = \frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1}{x^2} \rightarrow$ k hat eine Extremstelle für

$$K'(x)x - K(x) = 0 \rightarrow \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{x}$$

Wenn der Preis konstant ist, dann hat also auch k seine Extremstelle genau dort, wo auch W und U maximal werden!

53/18

c)

- f(0) = 7,5 und f(15) = 7,5, d. h. sowohl bei leerer Dose als auch bei vollständig gefüllter Dose befindet sich der Schwerpunkt jeweils genau auf halber Höhe (muss auch so sein, da in beiden Fällen die Massenverteilung symmetrisch ist)
- Der Schwerpunkt bewegt sich zunächst nach unten, ab einer Flüssigkeitshöhe von 3 cm dann wieder nach oben. Bei x = f(x) = 3 cm ist der Schwerpunkt genau auf der Höhe des Flüssigkeitsspiegels.
- aus der Abbildung: zwischen etwa x = 0,5 und etwa x = 9,5
  rechnerisch: $5 - 2\sqrt{5} \leq x \leq 5 + 2\sqrt{5}$

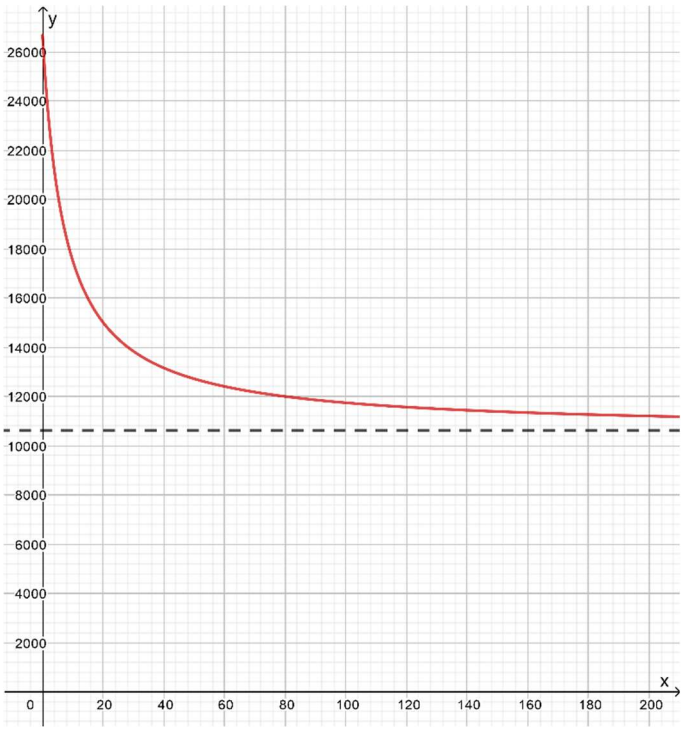
54/20

a) A(10) = 17 500; A(20) = 15 000 ➔ ……

b) Es müssen mindestens 80 Tauchroboter produziert werden. Die Stückkosten nähern sich für immer größere Produktionsmengen an den Wert 10 625 € pro Stück an.

c) k ist sma in D_k, d. h. die Stückkosten nehmen für zunehmende Produktionszahl immer weiter ab.

d)



e) G(300) ≈ 1 195 000 €

Es müssen mindestens 221 verkauft werden.

f) Der Verkaufspreis muss mindestens 5651 € betragen.

g) Es müssen mindestens 314 Stück produziert und verkauft werden.

54/21

a) w(2) = 32,5; $\lim\limits_{t \to \infty} w(t) = 10$

b) HoP($\approx 3{,}88 | \approx 50{,}16$), d. h. nach etwa 3,88 min ist der Wasserdurchfluss am größten, nämlich etwa 50,16 m^3/min.

c) ≈ 2,73; ≈ 5,05; ≈ 52,22

Dies sind die Zeiten, zu denen der Wasserdurchfluss am stärksten zu- bzw. ab- bzw. wieder zunimmt.

d) $\int_0^8 w(t)dt \approx 260$, d. h. in den ersten 8 min sind etwa 260 m^3 den Bach hinunter geflossen.

54/22

a) s(0) = 19, d. h. direkt nach Einleitung des Abwassers ist der Sauerstoffgehalt 10 mg/l.

b) Der Sauerstoffgehalt erreicht seinen kleinsten Wert nach etwa 2,45 Tagen, nämlich etwa 7,96 mg/l.

c) $t_W = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$

$s(t_W + 0{,}5) - s(t_W - 0{,}5) \approx 0{,}21$, d. h. die mittlere Zunahmerate des Sauerstoffgehalts zwischen einem halben Tag vor und einem halben Tag nach dem Zeitpunkt der größten Zunahmerate ist etwa 0,21 mg/l pro Tag.

d) Nach etwa 9,36 Tagen ist der Sauerstoffgehalt wieder auf 90% des ursprünglichen Wertes angestiegen.